【引用格式】黄兴雨，莫世奇，王博，等. 非均匀声矢量线阵差分波束形成方法[J]. 数字海洋与水下攻防，2025，8（5）：518-528.

非均匀声矢量线阵差分波束形成方法

黄兴雨[1, 2, 3]，莫世奇[1, 2, 3, *]，王　博[1, 2, 3]，韩宝进[4]

（1. 哈尔滨工程大学 水声技术全国重点实验室，黑龙江 哈尔滨 150001；
2. 海洋信息获取与安全工信部重点实验室（哈尔滨工程大学），工业和信息化部，黑龙江 哈尔滨 150001；
3. 哈尔滨工程大学 水声工程学院，哈尔滨 150001；
4. 桂林电子科技大学 信息与通信学院，广西 桂林 541004）

摘　要　为提升差分波束形成器的鲁棒性，提出了一种基于非均匀声矢量线阵的差分波束形成方法。通过无失真约束与极值约束实现了理想可转向差分波束图设计，通过对比波束响应与理想可转向差分波束图，得到基于麦克劳林级数的最小范数解。从理论上分析了在非均匀线阵下阵元间距对白噪声增益的影响，证明了在优化阵元位置后可以实现鲁棒性差分波束形成器的设计。不同于传统差分方法，所提出方法可以在不损失空间增益的情况下提升差分波束形成器的鲁棒性。数值仿真证明：所提出方法在非均匀线阵下可以实现转向同时具有更高的空间增益。

关键词　非均匀线阵；声矢量传感器；差分波束形成；白噪声增益

中图分类号　TB566　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　2096-5753(2025)05-0518-11

DOI　10.19838/j.issn.2096-5753.2025.05.001

A Differential Beamforming Method Based on Non-Uniform Linear Acoustic Vector Sensor Array

HUANG Xingyu[1, 2, 3]，MO Shiqi[1, 2, 3, *]，WANG Bo[1, 2, 3]，HAN Baojin[4]

（1. National Key Laboratory of Underwater Acoustic Technology，Harbin Engineering University，Harbin 150001，China；2. Key Laboratory of Marine Information Acquisition and Security（Harbin Engineering University），Ministry of Industry and Information Technology，Harbin 150001，China；3. College of Underwater Acoustic Engineering，Harbin Engineering University，Harbin 150001，China；4. School of Information and Communication，Guilin University of Electronic Technology，Guilin 541004，China）

Abstract　In order to improve the robustness of the differential beamformer，a differential beamforming method based on non-uniform linear acoustic vector sensor array is proposed in this paper. The design of ideal steerable differential beampattern is realized by distortionless constraint and extreme value constraint，and the minimum-norm solution based on the McLaughlin series is obtained by comparing the beam response with the ideal steerable differential beampattern. The effect of the sensor spacing on white noise gain under a non-uniform linear array is theoretically analyzed，and it is demonstrated that the design of a robust differential beamformer can be achieved after optimizing the position of the sensors. Unlike the traditional differential method，the proposed method

收稿日期：2025-07-17

作者简介：黄兴雨（2000-），男，博士生，主要从事矢量信号处理研究。

*通信作者：莫世奇（1978-），男，博士，教授，主要从事水下噪声测试分析、水声信号处理、矢量声呐呐及数据融合等研究。

基金项目：国家自然科学基金项目“复杂浅海环境中船舶辐射噪声测量技术研究”(52271343)。

can enhance the robustness of the differential beamformer without loss of spatial gain. Numerical simulations are used to demonstrate that the proposed method can realize steering with higher spatial gain under non-uniform linear array.

Key words　non-uniform linear array；acoustic vector sensor；differential beamforming；white noise gain

0　引言

波束形成方法常用于声源定位、声呐与雷达探测系统、语音信号增强等[1-6]。作为最经典的波束形成方法，常规波束形成（Conventional Beamforming，CBF）方法通过对传感器阵列中各阵元的数据进行加权求和得到波束输出，可以获得高于单个无指向性传感器的空间增益，但 CBF 方法所能提供的空间增益有限，并且波束图形状随着频率改变而变化，对宽带信号处理能力弱[3]。而差分波束形成（Differential Beamforming，DBF）方法可以获得较高且稳定的空间增益，其空间响应具有频率不变性，有利于处理宽带信号，克服了 CBF 方法局限性[7]。为了保证差分过程的准确性，传感器阵列孔径要足够小，通过 2 个无指向性传感器的差分可以获得一阶差分指向性，以此类推，为了实现 N 阶差分需要至少 N+1 个无指向性传感器[8-9]，但这种通过多级差分过程得到的波束形成器在低频处鲁棒性较差，严重地放大白噪声。为了缓解差分过程中低频白噪声放大的缺陷，文献[10-11]中将时域的差分过程转换为短时傅里叶变换（Short Time Fourier Transform，STFT）域，通过零约束方法设计差分波束形成器，而后的差分波束形成器大多在 STFT 域进行优化设计，如鲁棒性超指向性波束形成器[12]、基于二次特征值的波束形成器[13-14]等。

HUANG 等[15]在 STFT 域的基础上，在频域进行差分，得到了高于传统 STFT 域设计的波束形成器的空间增益，而后这种方法又被应用于小孔径非均匀线阵中，在获得较高的空间增益时仍能保证空间响应不随频率变化[16]。理论上，由 M 个传感器组成的小孔径均匀线阵（Small Aperture Uniform Linear Array，SAULA）空间处理增益可达 20log$M$[17]，因而 DBF 方法大多应用于 SAULA 上。不同于传统 DBF 方法，BENESTY 等[7]通过对比波束响应与理论差分波束图，采用级数展开方法逼近理论差分波束图，同样获得较高的空间增益。然而，上述 SAULA 研究均以端射方向构建模型，在蓝牙等语音增强系统中 DBF 方法可以获得较稳定的增益。而在雷达与声呐探测系统中，目标方位实时变化，若仍采用端射方向构建模型可能会出现放大干扰、抑制信号的现象，因此解决 SAULA 转向问题至关重要[18-19]。JIN 等[8]通过对理论差分波束图的零点分析，证明了采用无指向性传感器无法设计一阶可转向 SAULA 并得到了 N（N>1）阶可转向波束图的零点关系，依据传统的零陷方法设计出 N 阶可转向的 SAULA。为了解决一阶 SAULA 不可转向的问题，LENG 等[20]采用 2 个 SAULA 设计出正交的偶极子响应，通过对正交的偶极子响应进行加权可以得到不同类型的一阶差分波束响应。得益于声矢量传感器（Acoustic Vectot Sensor，AVS）振速通道具有正交的偶极子指向性，CHEN 等[21]采用麦克劳林级数展开方法设计出可转向的矢量 SAULA，这种方法可以被推广至 N 阶。上述可转向 DBF 方法可以得到较高的空间增益，但是波束形成器的性能在高频处出现严重的性能退化[22]。

考虑到非均匀线阵（Non-Uniform Linear Arrays，NULAs）具备更好的鲁棒性，本文以非均匀声矢量线阵为研究基础，首先提出了对特定干扰方向约束的理想可转向差分波束图设计方法，结合麦克劳林级数展开方法设计了 1~3 阶差分波束形成器，此设计可以推广至 N 阶，从理论上分析了阵元间距对白噪声增益的影响。数值仿真验证了所提方法在 NULA 框架下可以获得更高的白噪声增益。

1　信号模型

假设远场平面波入射到由 M 个矢量传感器构成的非均匀声矢量线阵，传感器间距 $\delta_m\,(m=1,\cdots,M)$，入射角度 θ，导向矢量可以表示为

$$\boldsymbol{A}(\omega,\theta)=\boldsymbol{d}(\omega,\theta)\otimes\boldsymbol{a}(\theta) \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{d}(\omega,\theta)=\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau_1\cos\theta}\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau_2\cos\theta}\quad\cdots\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau_M\cos\theta}\right]^{\mathrm{T}}$ 表示非均匀声压线阵的导向向量；T 表示转置运

算；$\boldsymbol{a}(\theta)=[1 \quad \cos\theta \quad \sin\theta]^{\mathrm{T}}$ 表示单个矢量传感器的导向向量；$\otimes$ 表示 Kronecker 积；$\mathrm{j}=\sqrt{-1}$；$\tau_m=\delta_m/\mathrm{c}$，c =1 500 m/s 为声速。当目标位于方位 θ_s 时，接收信号可以表示为

$$\boldsymbol{Y}(\omega)=\boldsymbol{A}(\omega,\theta_s)X(\omega)+\boldsymbol{V}(\omega) \tag{2}$$

式中：$X(\omega)$ 为第 1 个矢量传感器声压通道信号；$\boldsymbol{V}(\omega)$ 为 $3M\times1$ 维噪声向量；$\boldsymbol{Y}(\omega)=\left[\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}(\omega) \quad \boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}(\omega) \quad \cdots \quad \boldsymbol{Y}_M^{\mathrm{T}}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}$ 为 $3M\times1$ 维接收信号向量；$\boldsymbol{Y}_m(\omega)=\left[y_{m,p}(\omega) \quad y_{m,v_x}(\omega) \quad y_{m,v_y}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}$ 为第 m 个矢量传感器接收信号；$y_{m,p}(\omega)$，$y_{m,v_x}(\omega)$、$y_{m,v_y}(\omega)$ 分别表示第 m 个矢量传感器声压通道；v_x 振速通道；v_y 振速通道接收数据。采用传统的空域滤波方法，可以得到滤波后的输出为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(\omega)&=\sum_{m=1}^{M}\boldsymbol{h}_m^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{Y}_m(\omega)=\\&\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{A}(\omega,\theta_s)X(\omega)+\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{V}(\omega)\end{aligned} \tag{3}$$

式中，H 表示共轭转置。

图 1 给出了非均匀声矢量线阵差分波束形成的整体实现流程，包括信号接收、加权处理、差分运算及波束输出等步骤，为后续算法设计提供了整体框架。

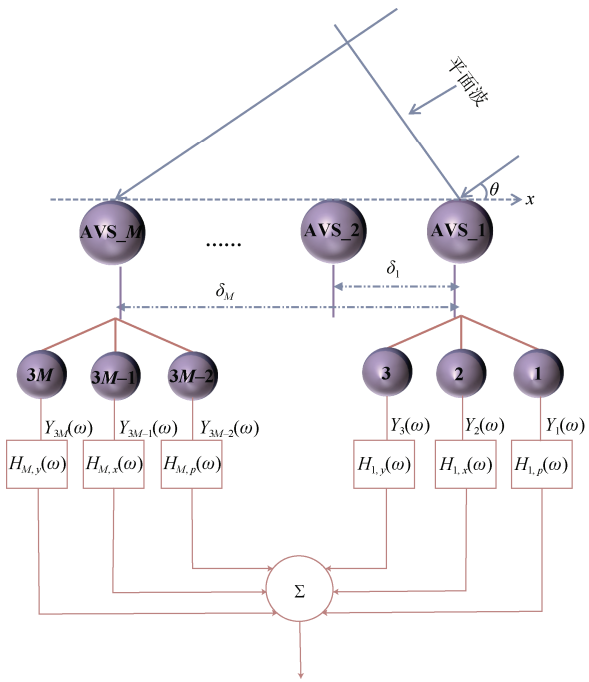

图 1 非均匀声矢量线阵差分波束形成实现流程

Fig. 1 Implementation of differential beamforming for non-uniform linear acoustic vector sensor array

2 性能度量

2.1 波束图

波束图衡量了波束形成器对来自不同方向平面波的空间响应，波束图定义为

$$\begin{aligned}B_M\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta\right]&=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\omega,\theta)\boldsymbol{h}(\omega)=\\&\sum_{m=1}^{M}h_{m,p}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau_m\cos\theta}+\\&\sum_{m=1}^{M}h_{m,v_x}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau_m\cos\theta}\cos\theta+\\&\sum_{m=1}^{M}h_{m,v_y}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau_m\cos\theta}\sin\theta\end{aligned} \tag{4}$$

为了保证目标方向上的信号无失真，非目标方向上的干扰被抑制，通常要满足无失真约束，即

$$B_M\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta_s\right]=1 \tag{5}$$

传统的差分线阵大多数将转向角度假定为端射方向，即 $\theta_s=0^\circ$ 或 $\theta_s=180^\circ$，然而当目标位于非端射方向时，波束图并不满足无失真响应，观测信号可能被抑制，严重影响水下目标探测效果。为了保证波束图无失真且具备转向能力，可以给出以下约束：

$$\begin{cases}B_M\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta_s\right]=1\\\left.\dfrac{\partial B_M\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta\right]}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_s}=0\end{cases} \tag{6}$$

无失真约束与极值约束保证了在不同转向角 θ_s 下，目标信号始终无失真。

2.2 白噪声增益

白噪声增益（White Noise Gain，WNG）衡量波束形成器在空间白噪声下获得的增益，反应了波束形成器的鲁棒性。WNG 定义为[6]

$$W[\boldsymbol{h}(\omega)]=\frac{\left|\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\right|^2}{\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_W(\omega)\boldsymbol{h}(\omega)} \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_W(\omega)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{W_{1,1}} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{W_{1,M}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\Gamma}_{W_{M,1}} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{W_{M,M}}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{W_{i,k}}=\begin{cases}\mathrm{diag}\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\} & i=k\\ \boldsymbol{O}_{3\times3} & i\neq k\end{cases} \tag{9}$$

式中：diag$\{\bullet\}$ 表示取其中元素构成对角矩阵；$\boldsymbol{O}_{3\times3}$ 表示 3×3 维零矩阵。最大 WNG 波束形成器可以由以下准则求得：

$$\min \boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_{W}(\omega)\boldsymbol{h}(\omega)\quad \text{s.t.}\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)=1 \tag{10}$$

利用拉格朗日乘子法可以得到最大 WNG 波束形成器为

$$\boldsymbol{h}_{\mathrm{MWNG}}(\omega)=\frac{\boldsymbol{\Gamma}_{W}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)}{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{W}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)} \tag{11}$$

则采用小孔径矢量线阵所能获得最大 WNG 为

$$W[\boldsymbol{h}_{\mathrm{MWNG}}(\omega)]=\frac{1}{\boldsymbol{h}_{\mathrm{MWNG}}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_{W}(\omega)\boldsymbol{h}_{\mathrm{MWNG}}(\omega)}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{W}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)=3M \tag{12}$$

2.3　指向性因子

指向性指数（Directivity Factor，DF）衡量了波束形成器在各向同性噪声中的性能，量化了波束形成器的指向性增益，其定义为[7]

$$D[\boldsymbol{h}(\omega)]=\frac{\left|B_{M}\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta_{s}\right]\right|^{2}}{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|B_{M}\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta\right]\right|^{2}\mathrm{d}\theta}=\frac{\left|B\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta_{s}\right]\right|^{2}}{\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_{D}(\omega)\boldsymbol{h}(\omega)} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{\Gamma}_{D}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta\right)\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$ 为噪声互谱矩阵，具体可以表示为

$$\boldsymbol{\Gamma}_{D}(\omega)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{D_{1,1}} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{D_{1,M}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\Gamma}_{D_{M,1}} & \cdots & \boldsymbol{\Gamma}_{D_{M,M}}\end{bmatrix} \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_{D_{i,k}}=\begin{cases}\mathrm{diag}\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\} & i=k\\ \begin{bmatrix}\rho_{p}^{(i,k)}(\omega) & \rho_{p,v_x}^{(i,k)}(\omega) & 0\\ \rho_{p,v_x}^{(k,i)}(\omega) & \rho_{v_x}^{(i,k)}(\omega) & 0\\ 0 & 0 & \rho_{v_y}^{(i,k)}(\omega)\end{bmatrix} & i\neq k\end{cases} \tag{15}$$

$$\rho_{p,v_x}^{(i,k)}(\omega)=\mathrm{j}\mathrm{J}_{1}\left[\omega\left(\tau_{k}-\tau_{i}\right)\right]$$

$$\rho_{p}^{(i,k)}(\omega)=\mathrm{J}_{0}\left[\omega\left(\tau_{k}-\tau_{i}\right)\right]$$

$$\rho_{v_x}^{(i,k)}(\omega)=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{J}_{0}\left[\omega\left(\tau_{k}-\tau_{i}\right)\right]-\mathrm{J}_{2}\left[\omega\left(\tau_{k}-\tau_{i}\right)\right]\right\}$$

$$\rho_{v_x}^{(i,k)}(\omega)=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{J}_{0}\left[\omega\left(\tau_{k}-\tau_{i}\right)\right]+\mathrm{J}_{2}\left[\omega\left(\tau_{k}-\tau_{i}\right)\right]\right\}$$

式中，$\mathrm{J}_{n}(\bullet)$ 为 n 阶柱贝塞尔函数。

最大 DF 波束形成器（也称超指向性波束形成器）可由以下准则求得[23]：

$$\min \boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_{D}(\omega)\boldsymbol{h}(\omega)\quad \text{s.t.}\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)=1 \tag{16}$$

同理，采用拉格朗日乘子法，可以求得最大 DF 波束形成器为

$$\boldsymbol{h}_{\mathrm{MDF}}(\omega)=\frac{\boldsymbol{\Gamma}_{D}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)}{\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{D}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)} \tag{17}$$

则对应的最大 DF 为

$$D[\boldsymbol{h}_{\mathrm{MDF}}(\omega)]=\frac{1}{\boldsymbol{h}_{\mathrm{MDF}}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_{D}(\omega)\boldsymbol{h}(\omega)}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{D}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{D}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\right] \tag{18}$$

式中，$\mathrm{tr}(\bullet)$ 表示矩阵的迹运算。根据矩阵的迹运算性质，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{BC})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{CB})$。公式（18）可以进一步表示为

$$D[\boldsymbol{h}_{\mathrm{MDF}}(\omega)]=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{\Gamma}_{D}^{-1}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\right]=\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Gamma}_{D}^{-1}(\omega)\right]\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\right]=2M\,\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Gamma}_{D}^{-1}(\omega)\right] \tag{19}$$

可以看出，最大 DF 取决于传感器数量与背景噪声。

3　宽频带差分波束形成器设计

3.1　理想 N 阶可转向差分波束图

理想 N 阶可转向差分波束图可表示为

$$B_{N}\left[\boldsymbol{a}_{N},\cos\left(\theta-\theta_{s}\right)\right]=\sum_{n=0}^{N}a_{N,n}\cos^{n}\left(\theta-\theta_{s}\right)=\boldsymbol{a}_{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}_{N}\left[\cos\left(\theta-\theta_{s}\right)\right] \tag{20}$$

式中：$\boldsymbol{a}_{N}=\begin{bmatrix}a_{N,0} & a_{N,1} & \cdots & a_{N,N}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为波束图系数；$\sum_{n=0}^{N}a_{N,n}=1$。

$$\boldsymbol{p}_{N}\left[\cos\left(\theta-\theta_{s}\right)\right]=\begin{bmatrix}1 & \cos\left(\theta-\theta_{s}\right) & \cdots & \cos^{N}\left(\theta-\theta_{s}\right)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

将（6）约束应用于理想差分波束图中，可以得到

$$B_{N}\left[\boldsymbol{a}_{N},\cos\left(\theta_{s}-\theta_{s}\right)\right]=\sum_{n=0}^{N}a_{N,n}=1 \tag{21}$$

且

$$\left.\frac{\partial B_N\left[\boldsymbol{a}_N,\cos\left(\theta-\theta_s\right)\right]}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_s}=$$

$$-\sum_{n=1}^{N}na_{N,n}\cos^{n-1}\left(\theta_s-\theta_s\right)\sin\left(\theta_s-\theta_s\right)=0 \tag{22}$$

可以看出，不同于传统的波束图，理想 N 阶可转向差分波束图在转向角处始终满足极值约束，这意味着理想一阶可转向波束图具备转向能力，同时在端射方向上不会出现伪峰。与超指向性波束形成器类似，波束图系数也可以通过构建优化准则进行求解[24]，当特定方向上存在干扰时，满足

$$\min\boldsymbol{a}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{a}_N\quad\text{s.t.}\boldsymbol{P}\boldsymbol{a}_N=\boldsymbol{i}_\alpha \tag{23}$$

其中：

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{p}_N\left[\cos\left(\theta-\theta_s\right)\right]\boldsymbol{p}_N^{\mathrm{T}}\left[\cos\left(\theta-\theta_s\right)\right]\mathrm{d}\theta$$

式中：$\boldsymbol{i}_\alpha=\left[1\quad\boldsymbol{O}_\alpha^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{O}_\alpha$ 为 $\alpha+1$ 维全零列向量，$\theta_1,\cdots,\theta_\alpha\ (\alpha<N)$ 为波束图零点方向。

$$\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{p}_N\left[\cos\left(\theta_s-\theta_s\right)\right]\quad\boldsymbol{p}_N\left[\cos\left(\theta_1-\theta_s\right)\right]\quad\cdots\quad\boldsymbol{p}_N\left[\cos\left(\theta_\alpha-\theta_s\right)\right]\right]^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

可以得到公式（23）的解为[25]

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{CMDF},N}=\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{p}}^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Gamma}_{\mathrm{p}}^{-1}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\boldsymbol{i}_\alpha \tag{25}$$

3.2 一阶可转向差分波束形成器设计

将公式（4）进行麦克劳林级数展开，得到

$$\begin{aligned}&B_{M,N}\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta\right]=\\&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{\left(\mathrm{j}\omega\tau_m\cos\theta\right)^n}{n!}h_{m,p}(\omega)+\\&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{\left(\mathrm{j}\omega\tau_m\cos\theta\right)^n}{n!}h_{m,v_x}(\omega)\cos\theta+\\&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{M}\frac{\left(\mathrm{j}\omega\tau_m\cos\theta\right)^n}{n!}h_{m,v_y}(\omega)\sin\theta=\\&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{j}\omega\right)^n}{n!}\cos^n\theta\sum_{m=1}^{M}\tau_m^nh_{m,p}(\omega)+\\&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{j}\omega\right)^n}{n!}\cos^{n+1}\theta\sum_{m=1}^{M}\tau_m^nh_{m,v_x}(\omega)+\\&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\mathrm{j}\omega\right)^n}{n!}\cos^n\theta\sin\theta\sum_{m=1}^{M}\tau_m^nh_{m,v_y}(\omega)\end{aligned} \tag{26}$$

利用有限阶的截断阶数 N_p 代替 ∞，可以得到

$$\begin{aligned}&B_{M,N}\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta\right]\approx\\&\sum_{n=0}^{N_t}\left(\mathrm{j}\omega\right)^n\cos^n\theta\sum_{m=1}^{M}\tau_m^nh_{m,p}(\omega)+\\&\sum_{n=0}^{N_t}\left(\mathrm{j}\omega\right)^n\cos^{n+1}\theta\sum_{m=1}^{M}\tau_m^nh_{m,v_x}(\omega)+\\&\sum_{n=0}^{N_t}\left(\mathrm{j}\omega\right)^n\cos^n\theta\sin\theta\sum_{m=1}^{M}\tau_m^nh_{m,v_y}(\omega)=\\&\boldsymbol{p}_{N_t}\left(\cos\theta\right)\boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_p(\omega)+\\&\bar{\boldsymbol{p}}_{N_t}\left(\cos\theta\right)\boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)+\\&\tilde{\boldsymbol{p}}_{N_t}\left(\cos\theta\right)\boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)\end{aligned} \tag{27}$$

其中：

$$\boldsymbol{p}_{N_t}\left(\cos\theta\right)=\left[\boldsymbol{p}_{N-1}^{\mathrm{T}}\left(\cos\theta\right)\quad\boldsymbol{0}_{N_t-N+1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{T}_{N_t}=\left[\boldsymbol{t}_1\quad\boldsymbol{t}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{t}_{N_t}\right]$$

$$\boldsymbol{t}_n=\left[\tau_1^n\quad\tau_2^n\quad\cdots\quad\tau_M^n\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\bar{\boldsymbol{p}}_{N_t}\left(\cos\theta\right)=\boldsymbol{p}_{N_t}\left(\cos\theta\right)\cdot\cos\theta$$

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_{N_t}\left(\cos\theta\right)=\boldsymbol{p}_{N_t}\left(\cos\theta\right)\cdot\sin\theta$$

$$\boldsymbol{Q}_{N_t}=\mathrm{diag}\left\{\frac{\left(\mathrm{j}\omega\right)^0}{0!},\frac{\left(\mathrm{j}\omega\right)^1}{1!},\cdots,\frac{\left(\mathrm{j}\omega\right)^{N_t}}{N_t!}\right\}$$

$$\boldsymbol{h}_p(\omega)=\left[h_{1,p}(\omega),\cdots,h_{M,p}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)=\left[h_{1,v_x}(\omega),\cdots,h_{M,v_x}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)=\left[h_{1,v_y}(\omega),\cdots,h_{M,v_y}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}$$

将公式（20）中 N 限制为 1，可以得到理想一阶可转向差分波波束图：

$$\begin{aligned}&B_1\left[\boldsymbol{a}_1,\cos\left(\theta-\theta_s\right)\right]=a_{1,0}+a_{1,1}\cos\left(\theta-\theta_s\right)=\\&a_{1,0}+a_{1,1}\cos\theta_s\cos\theta+a_{1,1}\sin\theta_s\sin\theta\end{aligned} \tag{28}$$

对比公式（27）与公式（28）可以得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_p(\omega)=\boldsymbol{a}_{1,p}\\\boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)=\boldsymbol{a}_{1,v_x}\\\boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)=\boldsymbol{a}_{1,v_y}\end{cases} \tag{29}$$

其中：

$$\boldsymbol{a}_{1,p}=\left[a_{1,0}\quad\boldsymbol{O}_{N_t}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a}_{1,v_x}=\left[a_{1,1}\cos\theta_s\quad\boldsymbol{O}_{N_t}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a}_{1,v_y}=\left[a_{1,1}\sin\theta_s\quad\boldsymbol{O}_{N_t}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

可以得到矢量传感器各通道权向量的最小范数解为

$$\begin{cases}\boldsymbol{h}_p(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{1,p}\\ \boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{1,v_x}\\ \boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{1,v_y}\end{cases}\tag{30}$$

3.3　二阶可转向差分波束形成器设计

同理，将公式（20）中 N 限制为 2，可以得到理想二阶可转向差分波波束图：

$$\begin{aligned}&B_2\left[\boldsymbol{a}_2,\cos\left(\theta-\theta_s\right)\right]=\\&\left(a_{2,0}+a_{2,2}\sin^2\theta_s\right)+a_{2,1}\cos\theta_s\cos\theta+\\&a_{2,1}\sin\theta_s\sin\theta+a_{2,2}\cos 2\theta_s\cos^2\theta+\\&a_{2,2}\sin 2\theta_s\cos\theta\sin\theta\end{aligned}\tag{31}$$

通过对比公式（27）与公式（31），本征波束 $\cos\theta$ 项由矢量传感器的 P 通道与 V_x 通道加权构成。为了区分 P 通道与 V_x 通道对 $\cos\theta$ 项的贡献，引入常数 κ，满足 $\kappa\in[0,1]$，公式（31）改写为

$$\begin{aligned}&B_2\left[\boldsymbol{a}_2,\cos\left(\theta-\theta_s\right)\right]=\\&\left(a_{2,0}+a_{2,2}\sin^2\theta_s\right)+\kappa a_{2,1}\cos\theta_s\cos\theta+\\&(1-\kappa)a_{2,1}\cos\theta_s\cos\theta+a_{2,2}\cos 2\theta_s\cos^2\theta+\\&a_{2,1}\sin\theta_s\sin\theta+a_{2,2}\sin 2\theta_s\cos\theta\sin\theta\end{aligned}\tag{32}$$

常数 κ 并不会改变理想差分波束图的形状。当 $\kappa=0$ 时，本征波束 $\cos\theta$ 项由 V_x 通道加权构成；当 $\kappa=1$ 时，本征波束 $\cos\theta$ 项由 P 通道加权构成。因此，可以得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_p(\omega)=\boldsymbol{a}_{2,p}\\ \boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)=\boldsymbol{a}_{2,v_x}\\ \boldsymbol{Q}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)=\boldsymbol{a}_{2,v_y}\end{cases}\tag{33}$$

其中：

$$\boldsymbol{a}_{2,p}=\left[a_{2,0}+a_{2,2}\sin^2\theta_s\quad\kappa a_{2,1}\quad\boldsymbol{O}_{N_t-1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a}_{2,v_x}=\left[(1-\kappa)a_{2,1}\cos\theta_s\quad a_{2,2}\cos 2\theta_s\quad\boldsymbol{O}_{N_t-1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a}_{2,v_y}=\left[a_{2,1}\sin\theta_s\quad a_{2,2}\sin 2\theta_s\quad\boldsymbol{O}_{N_t-1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

同理，矢量传感器各通道权向量的最小范数解为

$$\begin{cases}\boldsymbol{h}_p(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{2,p}\\ \boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{2,v_x}\\ \boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{2,v_y}\end{cases}\tag{34}$$

3.4　三阶可转向差分波束形成器设计

将公式（20）中的 N 限制为 3，并引入常数 κ，可以得到三阶可转向差分波束形成器的最小范数解：

$$\begin{cases}\boldsymbol{h}_p(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{3,p}\\ \boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{3,v_x}\\ \boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)=\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{3,v_y}\end{cases}\tag{35}$$

其中：

$$\boldsymbol{a}_{3,p}=\left[b_{3,0}\quad\kappa b_{3,1}\quad\kappa b_{3,2}\quad\boldsymbol{O}_{N_t-2}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a}_{3,v_x}=\left[(1-\kappa)b_{3,1}\quad(1-\kappa)b_{3,2}\quad b_{3,3}\quad\boldsymbol{O}_{N_t-2}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{a}_{3,v_y}=\left[c_{3,1}\quad c_{3,2}\quad c_{3,3}\quad\boldsymbol{O}_{N_t-2}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$b_{3,0}=a_{3,0}+a_{3,2}\sin^2\theta_s$$

$$b_{3,1}=a_{3,1}\cos\theta_s+3a_{3,3}\sin^2\theta_s\cos\theta_s$$

$$b_{3,2}=a_{3,2}\cos 2\theta_s$$

$$b_{3,3}=a_{3,3}\cos\theta_s\left(\cos^2\theta_s-3\sin^2\theta_s\right)$$

$$c_{3,1}=a_{3,1}\sin\theta_s+a_{3,3}\sin^3\theta_s$$

$$c_{3,2}=a_{3,2}\sin 2\theta_s$$

$$c_{3,3}=a_{3,3}\left(3\cos^2\theta_s-\sin^2\theta_s\right)\sin\theta_s$$

4　WNG 分析

对理论 WNG 进行分析，由公式（7）可以得到

$$\begin{aligned}&W[\boldsymbol{h}(\omega)]=\\&\frac{\left|\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{A}\left(\omega,\cos\theta_{\mathrm{s}}\right)\right|^2}{\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_W(\omega)\boldsymbol{h}(\omega)}=\\&\frac{1}{\boldsymbol{h}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{W}}(\omega)\boldsymbol{h}(\omega)}=\\&\frac{1}{\boldsymbol{h}_p^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{h}_p(\omega)+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}_{v_x}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{h}_{v_x}(\omega)+\frac{1}{2}\boldsymbol{h}_{v_y}^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{h}_{v_y}(\omega)}\end{aligned}\tag{36}$$

其中：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{h}_p^{\mathrm{H}}(\omega)\boldsymbol{h}_p(\omega)=\\&\boldsymbol{a}_{N,p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{N,p}=\\&\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{a}_{N,p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-\mathrm{H}}\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{N,p}\right]=\\&\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{N,p}\boldsymbol{a}_{N,p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-\mathrm{H}}\right]\le\\&\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{N,p}\boldsymbol{a}_{N,p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-\mathrm{H}}\right)\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\right]\end{aligned}\tag{37}$$

$$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{N,p}\boldsymbol{a}_{N,p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-\mathrm{H}}\right)=\sum_{i=0}^{N}\frac{(i!)^2 a_{p,i+1}^2}{\omega^{2i}}$$

式中，$a_{p,i+1}$是$\boldsymbol{a}_{N,p}$中第 i+1 个元素。

$$\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} M & \sum_{m=1}^{M}\delta_m & \cdots & \sum_{m=1}^{M}\delta_m^{N_t} \\ \sum_{m=1}^{M}\delta_m & \sum_{m=1}^{M}\delta_m^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{m=1}^{M}\delta_m^{N_t} & \cdots & \cdots & \sum_{m=1}^{M}\delta_m^{2N_t} \end{bmatrix} \tag{38}$$

可以看出，对于一阶差分可转向差分波束形成器，$B_{M,N}\left[\boldsymbol{h}(\omega),\cos\theta\right]$中 N=0，此时$\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-1}\boldsymbol{a}_{N,p}\boldsymbol{a}_{N,p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{N_t}^{-\mathrm{H}}\right)$与频率无关，即一阶差分波束形成器对应的 WNG 具有频率不变性；对于一阶以上的差分波束形成器，当阶数固定时，WNG 会随着频率的增加而增加；相同频率下，WNG 会随着波束形成器的阶数增加而降低，高阶差分波束形成器会有较差的鲁棒性。

由于$\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}$逆矩阵求解较为复杂，下面以 M=3，N_t=1为例进行分析，对非均匀线阵与均匀线阵下的 WNG。以第 1 个传感器为参考原点，设阵列总长为δ，对于非均匀线阵，各阵元位置：$\delta_1=0$，$\delta_2=\eta\delta$，$\delta_3=\delta$，$\eta\in(0,1)$；当$\eta=1/2$时为均匀线阵。公式（38）可以表示为

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_1^{\mathrm{H}}=\begin{bmatrix} 3 & \sum_{m=1}^{3}\delta_m \\ \sum_{m=1}^{3}\delta_m & \sum_{m=1}^{3}\delta_m^2 \end{bmatrix} \tag{39}$$

则

$$\mathrm{tr}\left[\left(\boldsymbol{T}_{N_t}\boldsymbol{T}_{N_t}^{\mathrm{H}}\right)^{-1}\right]=\frac{3+\sum_{m=1}^{3}\delta_m^2}{3\sum_{m=1}^{3}\delta_m^2-\left(\sum_{m=1}^{3}\delta_m\right)^2}=\frac{3+\left(\eta^2+1\right)\delta^2}{2\delta^2\left(\eta^2-\eta+1\right)} \tag{40}$$

通过上式可以看出，不同的传感器布放位置会改变 WNG 的上限，这也说明对于固定阵列尺寸，非均匀线阵的优化设计能够提升 WNG，得到更稳健的波束形成器。

5 仿真分析

采用数值仿真验证所提出方法的有效性。分别对一阶、二阶、三阶差分波束形成器的性能进行验证，为了更清晰地体现出所提出方法地优越性，保证阵列的总长度相同，将所提出方法与基于均匀声矢量线阵的差分波束形成方法、可转向差分麦克风阵列（Steerable Differential Microphone，SDMA）方法进行对比分析。由于 SDMA 方法无法实现一阶可转向差分波束形成，因此在设计一阶差分波束形成器，采用可转向一阶差分波束形成器（Steerable First-Order Differential Beamformer，SFODB）方法进行对比分析。

5.1 一阶差分波束形成

采用 5 个 AVS 组成的非均匀声矢量线阵进行设计，阵元位置分别为 0，3 cm，7 cm，12 cm，14 cm，转向角设置为 90°，波束图零点为 180°，通过公式（25）确定理想波束图系数，截断阶数$N_{\mathrm{p}}=2$，$\kappa=0.25$。

图 2 给出了不同方法在 f= 1 kHz 时的一阶差分波束图。可以看出，采用 SFODB 方法虽然波束图主瓣较 AVS 类的波束图较窄，但是其波束图是关于 0°~180°成轴对称的，这也是传统声压差分阵列所存在的问题。在 NULA 和 ULA 框架下，所提出方法设计的一阶差分波束图基本一致，趋近于理想差分波束图，相较于 SFODB 方法，其空间增益更高。

图 3 给出了不同方法一阶差分下 WNG 与 DF 随频率变化趋势。从图中可以看出，所提出方法无论是在 NULA 还是 ULA 框架下，其 WNG 均大于 0，证明此时不会出现白噪声放大的问题，这是由于单个 AVS 本身可以视为一阶差分波束形成器，在延时求和类波束形成的框架下可以得到稳健的差分结果；而 SFODB 方法尽管实现了一阶差分波束形成器的转向能力，但是其低频处会严重放大白噪声，鲁棒性较差。相较于 ULA，NULA 下波束形成器 WNG 略高，可以通过数值类方法确定阵元位置从而获得更高的 WNG。同样从图中可以看出，采用 AVS 设计的差分波束形成器 DF 约为 4.7 dB，高于声压传感器设计的差分波束形成器 DF，在高

频处由于差分近似的准确性较低，高频处 DF 会有所下降。

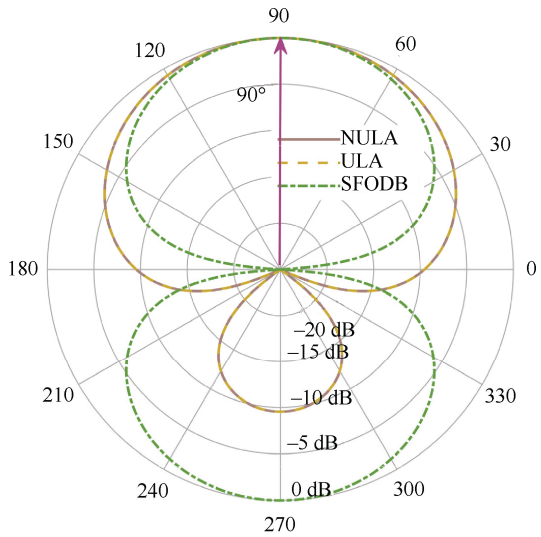

图 2　f = 1 kHz 一阶差分波束图对比

Fig. 2　Comparison of first-order differential beampatterns at f = 1 kHz

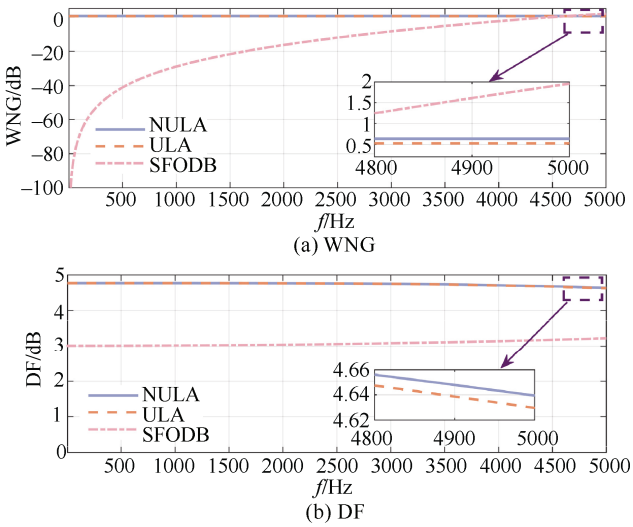

图 3　一阶差分波束形成器性能分析

Fig. 3　Performance analysis of first-order differential beamformer

图 4 给出了不同方法的一阶差分波束图随频率变化，可以看出，所采用的方法均可以获得频率不变响应，SFODB 方法的波束图关于 180°对称，其空间增益有限，在 NULA 与 ULA 下，所提出方法在不同频率下均可以获得准确的波束图近似结果。

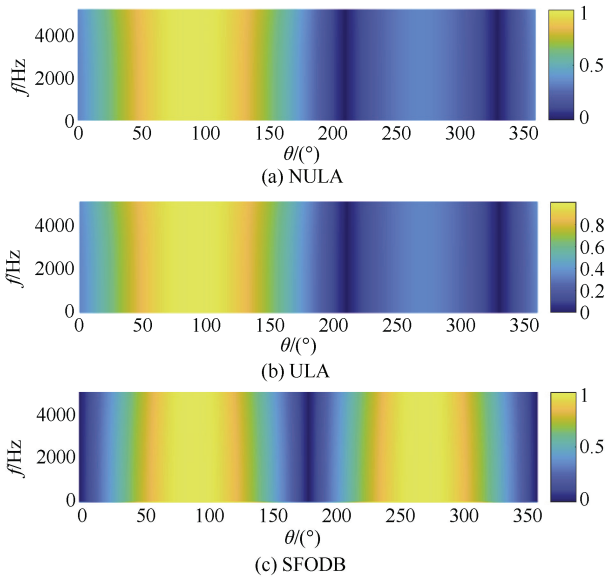

图 4　不同方法的一阶差分波束图随频率变化

Fig. 4　First-order differential beampatterns variation with frequency for different methods

5.2　二阶差分波束形成

采用 5 个 AVS 组成的非均匀声矢量线阵进行设计，阵元位置分别为 0，5 cm，8 cm，16 cm，20 cm，转向角设置为 135°，波束图零点为 30°，通过公式（25）确定理想波束图系数，截断阶数 $N_p = 3$，$\kappa = 0.25$。

图 5 给出了不同方法在 f = 1 kHz 时的二阶差分波束图。由于 SDMA 方法设计的二阶差分波束图具有对称性，在 135°与 225°存在峰值，且其主瓣较宽，对相邻近目标与干扰分辨能力有限。在 NULA 与 ULA 框架下，2 种差分波束图基本一致，和图 2 相比，其主瓣宽度更窄，更高阶的差分可以获得更高的空间增益。

图 6 给出了不同方法在二阶差分下 WNG 与 DF 随频率变化趋势。从 WNG 图中可以看出，所提出方法在低频处 WNG 略高于 SDMA 方法，但在高频处 SDMA 方法 WNG 更高；通过对比 NULA 与 ULA 可以看出，在 NULA 下的 WNG 略高于 ULA，这也再次印证了基于 NULA 的差分波束形成具有更好的鲁棒性。对比图 3 与图 6 中 WNG 可以发现，所提出方法随着差分阶数的增加 WNG 骤降，在低频处白噪声放大现象更明显。从图 6 中 DF 随频率变化曲线可以看出，不同于其他鲁棒性

方法，所提出方法可以在不损失 DF 的情况下提升差分波束形成器的 WNG，WNG 的提升与阵元间距选取密切相关。尽管 SDMA 方法 WNG 在高频处更具优势，但是其 DF 会低于 SFODB 方法的 DF，证明 SDMA 方法的空间增益会随着转向角与差分阶数的变化而变化。

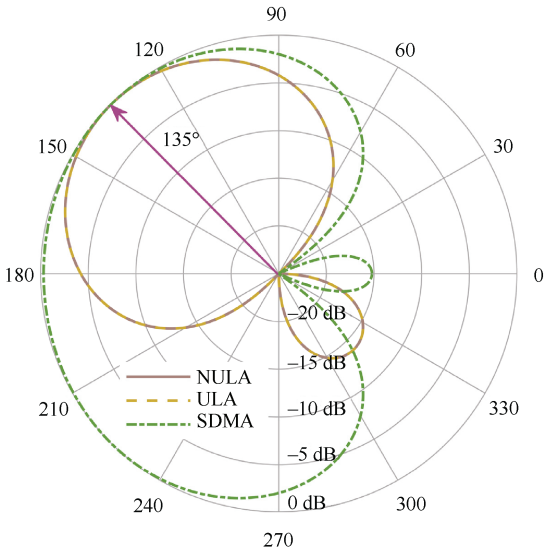

图 5　f = 1 kHz 二阶差分波束图对比

Fig. 5　Comparison of second-order differential beampatterns at f = 1 kHz

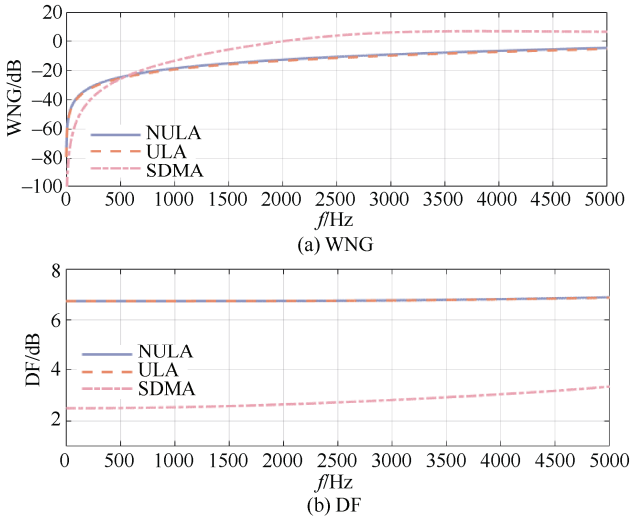

图 6　二阶差分波束形成器性能分析

Fig. 6　Performance analysis of second-order differential beamformer

图 7 中给出了不同方法的二阶差分波束图随频率变化，可以看出，SDMA 方法的波束图关于 180°对称且在高频处波束图主瓣发生畸变，证明其高频处空间增益会发生改变，这与图 6 中 DF 结果是一致的。所提出方法在 NULA 与 ULA 框架下波束图随频率变化的趋势基本一致，在高频处波束图主瓣略有变化。

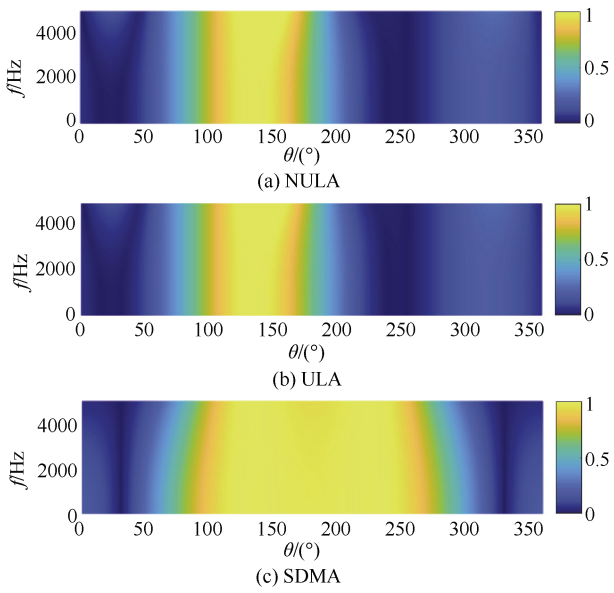

图 7　不同方法的二阶差分波束图随频率变化

Fig. 7　Second-order differential beampattern variation with frequency for different methods

5.3　三阶差分波束形成

采用 5 个 AVS 组成的非均匀声矢量线阵进行设计，阵元位置分别为 0，5 cm，8 cm，16 cm，20 cm，转向角设置为 45°，波束图零点为 130°，通过公式（25）确定理想波束图系数，截断阶数 $N_p = 4$，$\kappa = 0.25$。

图 8 中给出了不同方法在 f = 1 kHz 时的三阶差分波束图。可以看出随着差分阶数的增加，所提出方法与 SDMA 方法所设计的波束图均出现主瓣变窄，旁瓣变宽的现象，这意味着波束形成器的空间响应会随着差分阶数的增加而增加。

图 9 给出了不同方法在三阶差分下 WNG 与 DF 随频率变化趋势。从 WNG 图中可以看出，所提出方法在低频处 WNG 更具优势，SDMA 方法在高频处更具优势，且在 NULA 下可以获得更高的 WNG，但在高频处 SDMA 方法 WNG 更高。对比图 3，图 6 与图 9 中 WNG 可以发现，三阶差分下白噪声放大问题非常明显，对于更高阶的差分波束形成器其 WNG 更低，需要进一步考虑否是适用于

实际应用。从图 9 中 DF 变化曲线可以看出，所提出的方法在高阶差分时 DF 可达 8 dB 以上，但是在对频率变化较为敏感，在高频处其增益有所下降；SDMA 方法具有较为稳定的频率不变响应，但是其 DF 增益有限。

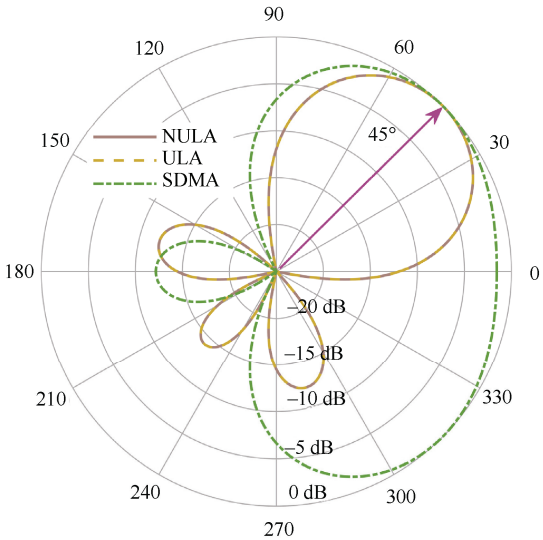

图 8　f = 1 kHz 三阶差分波束图对比

Fig. 8　Comparison of third-order differential beampatterns at f = 1 kHz

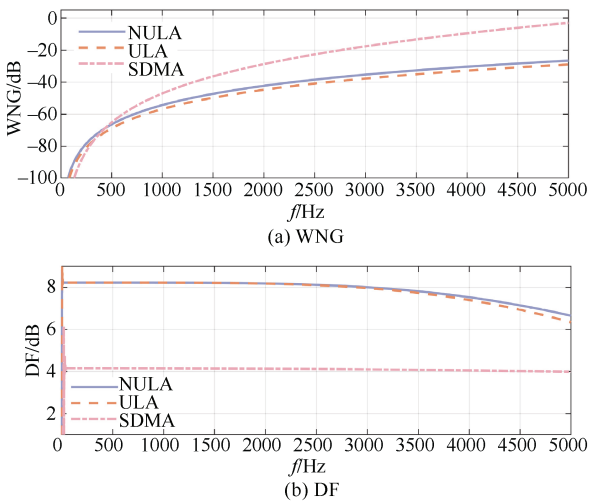

图 9　三阶差分波束形成器性能分析

Fig. 9　Performance analysis of third-order differential beamformer

图 10 中给出了不同方法的二阶差分波束图随频率变化趋势，可以看出所提出方法与 SDMA 方法的波束图均会在高频处偏离理想波束图，此时在 NULA 与 ULA 框架下波束图随频率变化的趋势仍然保持一致。随着差分阶数增加，空间增益有所提升，但是该方法所使用的频带有所缩减。

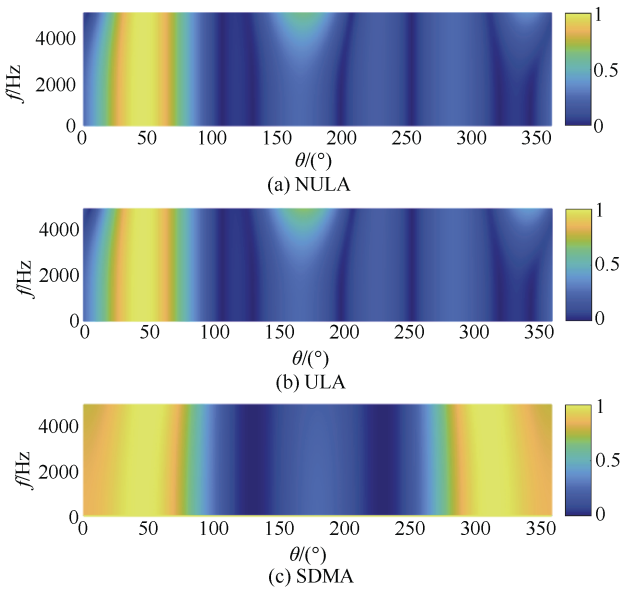

图 10　不同方法的三阶差分波束图随频率变化

Fig. 10　Third-order differential beampattern variation with frequency for different methods

6　结束语

本文提出了一种基于非均匀声矢量线阵的宽频带差分波束形成方法，通过对波束响应进行麦克劳林级数展开，对比理想可转向差分波束图，得到了 1~3 阶差分波束形成器的最小范数解，所提出的方法可以进一步拓展至 N 阶。通过对 WNG 分析，证明了合理优化阵元间距可以提升差分波束形成器的鲁棒性。采用数值仿真进一步验证，所提出方法在 NULA 与 ULA 框架下可以获得相同的差分波束图，即获得相同的空间增益，而在 NULA 下所提出方法具有略高于 ULA 下的 WNG，证明所提出方法可以在不损失空间增益的同时提高差分波束形成器的鲁棒性。通过与其他方法对比，证明所提出方法可以获得更高的空间增益。

参考文献

[1] CHEN F，YANG D S，MO S Q. A DOA estimation algorithm based on eigenvalues ranking problem[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2023，72：9501315.

[2] 汪勇，杨益新. 圆环形传感器阵列超指向性频率不变响应波束优化方法[J]. 声学学报，2022，43（4）：620-632.

[3] CHEN H Y，ZHU Z R，YANG D S. Conventional beamforming algorithm based on polarization filtering for an acoustic vector-sensor linear array mounted near a baffle[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering，2024，49（4）：1127-1139.

[4] CHEN F，YANG D S，MO S Q，et al. A method for estimating the direction of arrival without knowing the source number using acoustic vector sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing，2024，62：1001016 .

[5] YANG K F，ZHOU T，HUI J，et al. Passive acoustic bearing estimation of underwater gas leak using single vector hydrophone[J]. Applied Acoustics，2025，233：110623.

[6] HUANG X Y，CHEN F，MO S Q，et al. Fully steerable and interference suppressible differential beamforming for linear acoustic vector sensor array with small aperture[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement，2025，74：9520915 .

[7] BENESTY J，CHEN J D. Study and Design of Differential Microphone Arrays[M]. Berlin：Springer，2012.

[8] JIN J L，HUANG G P，WANG X H，et al. Steering study of linear differential microphone arrays[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2020，29：158-170.

[9] ZHAO X D，BENESTY J，HUANG G P，et al. On a particular family of differential beamformers with cardioid-like and no-null patterns[J]. IEEE Signal Processing Letters，2020，28：140-144.

[10] CHEN J D，BENESTY J，PAN C. On the design and implementation of linear differential microphone arrays[J]. The Journal of the Acoustical Society of America，2014，136（6）：3097-3113.

[11] BUCHRIS Y，COHEN I，BENESTY J. Frequency-domain design of asymmetric circular differential microphone arrays[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2018，26（4）：760-773.

[12] CHEN X，BENESTY J，HUANG G P，et al. On the robustness of the superdirective beamformer[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2021，29：838-849.

[13] HUANG G P，BENESTY J，CHEN J D. Fundamental approaches to robust differential beamforming with high directivity factors[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2022，30：3074-3088.

[14] LUO X Q，HUANG G P，JIN J L，et al. Design of maximum directivity beamformers with linear acoustic vector sensor arrays[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2023，31：1421-1435.

[15] HUANG G P，BENESTY J，COHEN I，et al. A simple theory and new method of differential beamforming with uniform linear microphone arrays[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2020，28：1079-1093.

[16] JIN J L，BENESTY J，HUANG G P，et al. On differential beamforming with nonuniform linear microphone arrays[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2022，30：1840-1852.

[17] 杨益新，汪勇，何正耀，等. 传感器阵列超指向性原理及应用[M]. 北京：科学出版社，2017.

[18] BORRA F，BERNARDINI A，ANTONACCI F，et al. Uniform linear arrays of first-order steerable differential microphones[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2019，27（12）：1906-1918.

[19] PARRA L C. Steerable frequency-invariant beamforming for arbitrary arrays[J]. The Journal of the Acoustical Society of America，2006，119（6）：3839-3847.

[20] LENG X，CHEN J D，BENESTY J. A new method to design steerable first-order differential beamformers[J]. IEEE Signal Processing Letters，2021，28：563-567.

[21] CHEN F，MA K，MAO Y P，et al. A novel method to design steerable differential beamformer using linear acoustics vector sensor array[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2023，31：2836-2849.

[22] PAN C，CHEN J D，BENESTY J. Theoretical analysis of differential microphone array beamforming and an improved solution[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2015，23（11）：2093-2105.

[23] JIN J L，BENESTY J，CHEN J D，et al. Differential beamforming from a geometric perspective[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2023，31：3042-3054.

[24] PAN C，CHEN J D，BENESTY J，et al. On the design of target beampatterns for differential microphone arrays[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2019，27（8）：1295-1307.

[25] PAN C，BENESTY J，CHEN J D. Design of directivity patterns with a unique null of maximum multiplicity[J]. IEEE/ACM Transactions on Audio，Speech，and Language Processing，2015，24（2）：226-235.

（责任编辑：曹晓霖）