

【引用格式】周欢思, 聂睿, 王蓉, 等. 无人航行器水密舱段振动特性理论分析模型研究[J]. 数字海洋与水下攻防, 2025, 8 (4): 424-436.

无人航行器水密舱段振动特性理论分析模型研究

周欢思¹, 聂睿^{2,*}, 王蓉², 孙海涛², 李森²

(1. 海军装备部, 湖北 宜昌 443003; 2. 宜昌测试技术研究所, 湖北 宜昌 443003)

摘要 无人航行器水密舱段作为全平台的主要结构, 建立其准确的结构振动特性预报模型, 明晰外界环境因素变化影响规律, 对实现整体方案及详细设计等阶段的快速迭代具有重要意义。针对这一问题, 将水密舱段合理简化为有限长含内部环肋圆柱壳结构, 以能量变分原理为基础, 分别对壳体结构能量、环肋结构能量、外流场耦合能量(可计及自由液面影响)、静水压力预应力能量等依次进行理论推导; 明确上述能量项具体表达形式后, 得到壳-液耦合振动能量泛函, 对能量泛函变分后成功建立壳体振动特性计算分析模型。通过与公开文献以及有限元软件计算结果进行对比, 计算模型的准确性得到了充分验证。随后, 利用该模型, 对潜深等因素所引起的圆柱壳振动特性变化进行了深入分析讨论, 阐明有关现象背后的数学物理机理。

关键词 环肋圆柱壳; 潜深; 自由液面; 静水压力; 流固耦合

中图分类号 U663.1

文献标识码 A

文章编号 2096-5753(2025)04-0424-13

DOI 10.19838/j.issn.2096-5753.2025.04.006

Research on Theoretical Models of Vibration Characteristics of Unmanned Underwater Vehicle Watertight Compartments

ZHOU Huansi¹, NIE Rui^{2,*}, WANG Rong², SUN Haitao², LI Sen²

(1. Navy Equipment Department, Yichang 443003, China;

2. Yichang Testing Technique Research Institute, Yichang 443003, China)

Abstract The watertight compartment is the main structural component of unmanned underwater vehicle platform. Establishing an accurate structural vibration prediction model of the watertight compartment and clarifying the influence of changes in external environmental factors are of great significance for rapid technological iteration in the overall design and detailed design stages. To address this issue, the watertight compartment is reasonably simplified as a finite-length cylindrical shell structure with internal ring stiffeners. Based on the principle of energy variation, theoretical derivations are carried out for the energy of the shell structure, the energy of the ring stiffeners, the fluid coupling energy (including the influence of the free surface), and the pre-stress energy due to hydrostatic pressure. After clarifying the specific expressions of the above energy terms, the vibration energy functional of the shell-liquid coupling is obtained. By varying the energy functional, a calculation and analysis model for the vibration characteristics of the shell is ultimately established. The accuracy of the calculation model in this paper is fully verified by comparing it with published literature and finite element software results. Subsequently, using this model, an in-depth analysis and discussion of the changes in the vibration characteristics of the cylindrical shell caused by factors such as dive depth are conducted, elucidating the mathematical and physical mechanisms behind

收稿日期: 2025-05-12

作者简介: 周欢思 (1990-), 男, 大学本科, 助理工程师, 主要从事水中兵器和水声设备研究。

*通信作者: 聂睿 (1994-), 男, 博士, 工程师, 主要从事水下无人航行器结构振动与噪声研究。

the phenomena.

Key words ring-stiffened cylindrical shell; dive depth; free surface; hydrostatic pressure; fluid-structure coupling

0 引言

在实际工程应用环境下,受到外部水介质影响,与之耦合的水下工程结构振动特性将产生明显改变。如何精确预报水下壳体结构振动特性作为一类经典流-固耦合问题,受到了相关领域内工程研究人员的广泛关注^[1-4]。随着数值计算方法的发展,各类基于有限元/边界元等数值原理的公开商业软件被广泛应用于典型舱段结构——加肋圆柱壳的振动特性计算^[5]。新型结构形式^[6]、特殊材料构型^[7]等需要大量计算优化工作的新思路、新方案,经由数值计算模型进行设计迭代后,在舱段中低频振动控制领域中展示了广阔应用前景。

然而,混合数值法天然存在着计算代价大、物理意义不明确等缺点,因此仍有诸多学者致力于采用(半)解析法建立水下舱段结构振动计算模型。由于浸没于无限域中的旋转壳体有着良好轴对称性质,与流场耦合后的壳体模态仍可将周向位移通过互不耦合的傅里叶级数进行描述,因此对其声(流)场的积分可以简化为沿壳体生成线的一维积分问题,使得计算工作量大大减少^[8]。利用这一特性,KWARK^[9]则从能量原理和势流理论出发,将流体附连水质量以矩阵形式加入圆柱壳自由振动方程中,推导给出了简洁可靠的全浸没圆柱壳自振特性计算模型。有关工作重难点主要有2点:1)得到结构部分最小单元组合,利用结构连续性条件将各单元装配为整体;2)满足外部水介质流(声)压项与壳体在结合面处的速度连续条件,得到最终的流(声)-固耦合控制方程。

尽管基于无限域假定开展的研究工作已取得丰硕成果,并对绝大多数工程实际情况具可靠可信的指导价值,但当壳体结构靠近自由液面或海底时,若假定流场为无限域显然并不合适。一种通用的处理完全浸没结构自由液面的方法是镜像法。镜像法最先被用于研究平面边界附近简单声源的辐射特性,并成功解释了近表面的单极子的Lloyd镜

像现象^[10]。而常见的有限元-边界元耦合计算方法也可以通过与镜像法结合,将自由液面影响转换为软声学边界下的三维声学Helmholtz方程修正解,由此实现流场-结构耦合振动性能准确计算^[11-12]。ERGIN等^[13]利用商业数值计算软件有关模块对有限浸没深度下圆柱壳振动特性计算,结果表明壳体结构同阶次模态固有频率会随着浸没深度减小而增大,其设计的试验结果也印证了有关结论。以上研究都具有相当高的价值,但考虑自由液面后的数值法将需要更大计算代价,因此国内李天匀教授团队在理论方法求解该问题领域进行了大量工作,其研究结果表明对于任意长径比的圆柱壳结构,当结构浸没深度与结构半径之比超过4倍这一极限值后,圆柱壳的振动特性将趋向于无限域工况;潜深持续增大则会导致流体静压变化影响占主要地位,由于结构各阶模态频率减小且受静压影响程度不尽相同,壳模态频率阶次将出现变化并最终出现失稳现象^[14-15]。

对于环肋型加筋结构,目前主要存在2种处理方法,第一种方法将加筋视为完全独立的梁结构或特殊圆环板结构,根据其与被加强结构之间严格连续条件建立力学模型^[16]。该方法计算精度高且能正确模拟加筋结构对被加强结构振型的影响,但由于每个加筋结构都需要根据其振动位移单独建立计算模型,处理繁琐且计算代价很大。另一种方法则基于加筋结构尺寸不大时可以认为是由被加强结构带动加筋结构一起振动的假定,将加筋结构的振动位移用对应位置处主体结构振动位移进行代替。这种方法又可细分为2类:正交异性板壳法^[17]和离散元件法^[18]。前者将加筋的刚度和质量等效后附加于被加强结构中面上,使原结构变为正交异性结构。这种方法简单快捷,但仅适合处理均匀密加筋结构。离散元件法则将结构与加筋分开,单独计及加筋变形,利用结构与加筋位移协调关系建立模型。后者计算精确且能分析各类复杂加筋情况,因此受到了更广泛应用。

针对目前工程领域多使用商用数值软件进行

无人航行器水密舱段振动特性预报计算的现状, 本文研究将工作重点聚焦于舱段振动特性理论建模。通过对相关领域理论研究现状总结梳理, 将水密舱段合理简化为有限长加筋圆柱壳结构, 成功建立其理论计算分析模型, 并对潜深等因素引起的壳体振动特性变化进行了分析。利用理论方法简洁可靠、计算代价小的优势, 将其应用于结构迭代设计流程之中, 可有效指导实际工程设计工作, 极大提升效率。具体来说, 采用 Euler 梁函数代替圆柱壳轴向位移函数, 并基于壳体无旋转假定及 Love 壳体理论, 得到壳体动能与势能; 随后, 将环肋位移分量采用对应位置处壳体中面位移分量进行描述, 基于欧拉梁理论, 得到各加筋结构能量; 针对外部流场, 基于势流理论, 结合镜像法, 推导考虑自由液面的流体速度势分布, 再根据壳-液结合面速度连续条件, 得到流场速度势向量与壳体位移向量的迁移矩阵, 并将流场以做功形式加入到整个系统之中; 而与潜深有关的静水压力则可作为一种预应力载荷, 明确其对应做功形式。最后, 对全系统能量泛函进行变分, 获得壳-液耦合振动方程, 并求解出壳体振动特性。研究表明: 当圆柱壳在水下潜深超过

5 倍半径时, 自由液面的影响可以忽略; 当圆柱壳位于大潜深区域 (20 倍半径潜深) 内, 流体静压的影响才较为明显; 加筋结构可显著增强结构整体刚度, 造成壳体同阶次模态固有频率增大, 且能有效提升结构抗静压能力。

1 有限潜深加筋圆柱壳振动模型

1.1 模型描述

考虑自由液面影响的有限潜深圆柱壳如图 1 所示。圆柱壳几何参数为长度 L_{cy} , 壳体中面半径 R_{cy} , 壳体厚度 h_{cy} ; 圆柱壳材料参数为弹性模量 E_{cy} , 泊松比 μ_{cy} , 密度 ρ_{cy} ; 壳体内部轴向上布置有环肋加强筋结构, 其参数为弹性模量 E_{sti} , 泊松比 μ_{sti} , 密度 ρ_{sti} (i 为环肋编号, 从壳体左端由 1 开始依次定义); 流体的密度为 ρ_f 。定义潜深为自由液面到壳体水平半横切面的距离 H 。取圆柱壳左端面圆心为坐标原点 O , 坐标系取图 1 所示的柱坐标系 (r, θ, x) , 其中 r, θ, x 分别代表壳体横截面投影面径向, 壳体横截面投影面周向和投影面垂直面轴向。 u_{cy}, v_{cy}, w_{cy} 分别为壳体中面在各方向上的位移。同时, 假设圆柱壳两端存在虚拟封板, 即圆柱壳内部空间为真空无流体的独立空间。

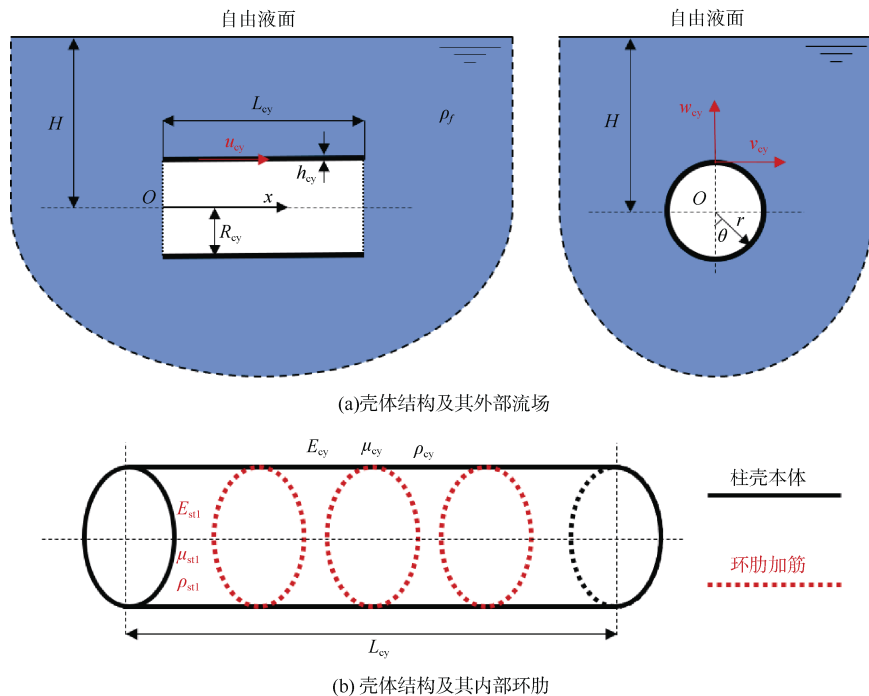


图 1 考虑自由液面影响的有限潜深加筋圆柱壳

Fig. 1 Reinforced cylindrical shell with limited depth considering influence of free liquid level

1.2 理论推导

首先, 需明确壳体结构自身的动能与势能。

假定本文研究对象为各向同性的薄壁圆柱壳, 故壳体中面位移可以假定为如下形式^[19]:

$$\begin{cases} u_{cy} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_{mn} X'_m(\eta x) \exp(in\varphi) \cos(\omega t) \\ v_{cy} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} V_{mn} X_m(\eta x) \exp(in\varphi) \cos(\omega t) \\ w_{cy} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} W_{mn} X_m(\eta x) \exp(in\varphi) \cos(\omega t) \end{cases} \quad (1)$$

式中: ω 为圆频率; m 为轴向模态阶数; n 为周向模态阶数; U_{mn} , V_{mn} 和 W_{mn} 为三向位移幅值系数; $X_m(\eta x)$ 为 Euler 梁挠度函数; “'” 代表挠度函数对 x 的导数。对于不同边界条件形式, 梁挠度函数均能以如下统一形式进行表达:

$$X_m(\eta x) = C_1 \sin(\eta x) + C_2 \cos(\eta x) + C_3 \sinh(\eta x) + C_4 \cosh(\eta x) \quad (2)$$

式中: C_1 , C_2 , C_3 和 C_4 为待定系数, 由边界条件来决定其具体取值; η 通常又被称为轴向半波数 k_m , 其在不同边界条件下亦存在对应的表达形式。

由于三角函数和双曲函数在随后的流-固耦合条件处理时存在区别, 故设

$$\begin{cases} X_m(k_m x) = X_{m1}(k_m x) + X_{m2}(k_m x) \\ X_{m1}(k_m x) = C_1 \sin(k_m x) + C_2 \cos(k_m x) \\ X_{m2}(k_m x) = C_3 \sinh(k_m x) + C_4 \cosh(k_m x) \end{cases} \quad (3)$$

如前所述, 本文将基于能量泛函变分原理研究有限潜深下有限长圆柱壳自由振动特性, 因此应明确各部分能量的具体表达形式。

忽略旋转效应的薄壳壳体动能表达形式如下^[20]:

$$T_{cy} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \iiint_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \quad (4)$$

式中: “ $\dot{\cdot}$ ” 代表位移分量对时间的导数; V 和 dV 分别为圆柱壳的体积分域和体积微元。

将式(1)–(3)代入式(4), 且由于位移函数存在正交性, 积分后的壳体动能可表述为

$$T_{cy} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\xi_{mn}\} [M_{mn}] \{\xi_{mn}\}^T \quad (5)$$

式中: $\{\xi_{mn}\}$ 由未知位移幅值系数组成, $\{\xi_{mn}\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}\}$; 质量矩阵 $[M_{mn}]$ 为三阶对角矩阵。

薄壳壳体应变能 (本文基于 Love 壳体理论) 表达形式如下^[20]:

$$U_{cy} = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (6)$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变向量; $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力向量。应变、应力向量的具体形式不在此具体列出, 参考各类有关文献即可。

同样, 积分后的壳体应变能可表述为

$$U_{cy} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \{\xi_{mn}\} [K_{mn}] \{\xi_{mn}\}^T \quad (7)$$

式中, 刚度矩阵 $[K_{mn}]$ 为三阶 Hermite 矩阵。

随后, 针对如图 1 及图 2 所示环肋结构, 采用 Galletly 环肋模型^[21], 将环肋视为欧拉梁。

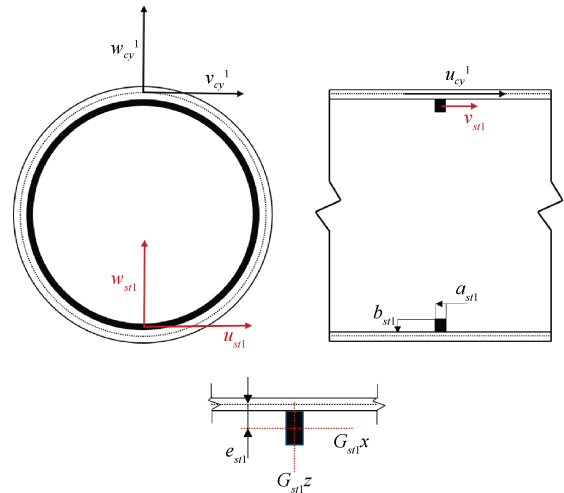


图2 柱壳环肋结构能量计算示意图

Fig. 2 Schematic diagram of energy calculation of column-shell ring rib structure

将第 1 根环肋自身形心处的位移及转角定义为 u_{st1} , v_{st1} , w_{st1} , β_{st1} , 则该环肋的动能 T_{st1} 和势能 U_{st1} 分别为

$$T_{st1} = \frac{\rho_{st1}}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ A_{st1} \left[(\dot{u}_{st1})^2 + (\dot{v}_{st1})^2 + (\dot{w}_{st1})^2 \right] + (I_{xst1} + I_{zst1}) (\dot{\beta}_{st1})^2 \right\} (R_{cy} + e_{st1}) d\theta \quad (8)$$

$$U_{st1} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_{st1} I_{zst1}}{2(R_{cy} + e_{st1})} \left(\beta_{st1} - \frac{1}{R_{cy} + e_{st1}} \frac{\partial^2 u_{st1}}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{E_{st1} I_{xst1}}{2(R_{cy} + e_{st1})^3} \left(w_{st1} + \frac{\partial^2 w_{st1}}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{E_{st1} A_{st1}}{2(R_{cy} + e_{st1})} \left(\frac{\partial v_{st1}}{\partial x_{cy}} + w_{st1} \right)^2 + \frac{G_{st1} J_{st1}}{2(R_{cy} + e_{st1})} \left(\frac{\partial w_{st1}}{\partial x_{cy}} \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R_{cy} + e_{st1}} \frac{\partial u_{st1}}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta \quad (9)$$

式中: G_{st1} 为环肋的剪切模量; A_{st1} 为环肋的截面面积; I_{xst1} 、 I_{zst1} 分别为环肋截面对截面主轴 $G_{st1}x$ 、 $G_{st1}z$ 的弯曲惯性矩; J_{st1} 为截面扭转常数; $e_{st1} = \pm (h_{cy} + b_{st1})/2$ 为环肋的偏心距, 内侧加筋时取正, 外侧加筋时取负, 对称加筋则取 0。

本文基于壳体变形带动环肋变形这一假定开展工作, 因此可将环肋位移分量使用环肋布置处壳体中面位移分量进行描述。为满足两者连接处的位移连续条件, 不同结构间位移分量转换关系为

$$\begin{cases} u_{st1} = u_{cy}^1 - e_{st1} \beta_{cy}^1 \\ v_{st1} = v_{cy}^1 \left(1 + \frac{e_{st1}}{R_{cy}} \right) - \frac{e_{st1}}{R_{cy}} \frac{\partial w_{cy}^1}{\partial \theta} \\ w_{st1} = w_{cy}^1 \end{cases} \quad (10)$$

式中, u_{cy}^1 等代表距离壳体左端面最近处第 1 根环肋的壳体中面对应位移分量。将式 (8) - (10) 联立, 即可得到以壳体位移表达的环肋结构能量项。

接着处理流体与壳体之间的流固耦合条件。

本文将把流-固耦合效应通过流体做功的形式加入到系统能量泛函当中, 首先需要确定有限潜深下 (考虑自由液面影响) 的速度势函数表达式。

由于本文研究暂不涉及结构与流场的相对运动, 因此不妨假定流体为不可压缩、无旋、无粘性的理想流体, 可利用经典势流理论进行分析, 则柱坐标系下的速度势函数 $\phi(r, x, \theta, t)$ 需满足柱坐标系下的 Laplace 方程:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

无穷远处的速度势函数条件为速度势为

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=\infty} = 0 \quad (12)$$

自由液面则可利用镜像原理进行处理, 即速度势可分为由结构振动直接产生的实源速度势和由自由液面反射产生的虚源速度势两者叠加而成。如图 3 所示, 虚源坐标系 (r', x', θ') 与实源坐标系 (r, x, θ) 关于自由液面对称。

假设流场中任意一点为点 P , 其速度势可以表示为

$$\phi_P(r, x, \theta, t) = \phi_P^r(r, x, \theta, t) + \phi_P^i(r', x', \theta', t) \quad (13)$$

式中: $\phi_P^r(r, x, \theta, t)$ 为实源流体速度势; $\phi_P^i(r',$

$x', \theta', t)$ 为虚源流体速度势。

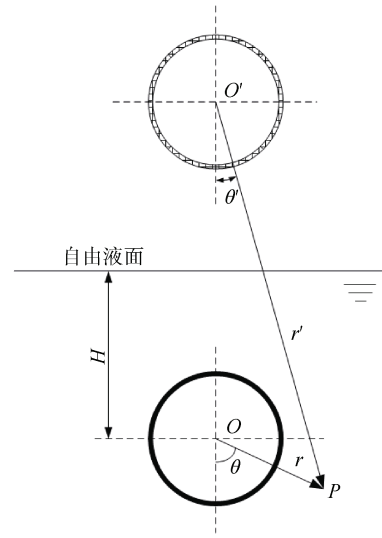


图 3 镜像原理示意图

Fig. 3 Schematic diagram of image principle

满足式 (12) 和式 (13) 的速度势函数表达式如下:

$$\begin{cases} \phi_P^r(r, x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\phi_{m1,n}^r K_n(k_m r) X_{m1}(k_m x) + \phi_{m2,n}^r H_n^{(2)}(k_m r) X_{m2}(k_m x) \right) \exp(in\theta) \sin(\omega t) \\ \phi_P^i(r', x', \theta', t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\phi_{m1,n}^i K_n(k_m r') X_{m1}(k_m x') + \phi_{m2,n}^i H_n^{(2)}(k_m r') X_{m2}(k_m x') \right) \exp(in\theta') \sin(\omega t) \end{cases} \quad (14)$$

式中: $K_n(\cdot)$ 为 n 阶第 2 类修正贝塞尔函数; $H_n^{(2)}(\cdot)$ 为 n 阶第 2 类汉克尔函数。

当 P 点位于自由液面上时, 其在 2 套坐标系的坐标下存在如下位置关系:

$$r = r', x = x', \theta + \theta' = \pi \quad (15)$$

如不考虑重力波等因素, 自由液面处需要满足速度势为 0 的条件:

$$\phi_P^r(r, x, \theta, t) + \phi_P^i(r', x', \theta', t) = 0 \quad (16)$$

将式 (14) 和 (15) 代入式 (16), 正交化处理后得到

$$\begin{cases} \phi_{m1,n}^r + (-1)^n \phi_{m1,n}^i = 0 \\ \phi_{m2,n}^r + (-1)^n \phi_{m2,n}^i = 0 \end{cases} \quad (17)$$

流场任意一点的速度势函数解析表达式为

$$\phi_P(r, x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} &\phi_{m1,n} \begin{pmatrix} K_n(k_m r) \exp(in\theta) \\ -(-1)^n K_{-n}(k_m r') \exp(-in\theta') \end{pmatrix} X_{m1}(k_m x) \\ &+ \phi_{m2,n} \begin{pmatrix} H_n^{(2)}(k_m r) \exp(in\theta) \\ -(-1)^n H_{-n}^{(2)}(k_m r') \exp(-in\theta') \end{pmatrix} X_{m2}(k_m x) \end{aligned} \right\} \sin(\omega t) \quad (18)$$

由 Graf 加法定理可知

$$\left\{ \begin{aligned} &K_{-n}(k_m r') \exp(-in\theta') = \\ &\sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^a K_{a+n}(2k_m H) I_a(k_m r) \exp(ia\theta) \quad r < 2H \\ &\sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^a I_{a+n}(2k_m H) K_a(k_m r) \exp(ia\theta) \quad r \geq 2H \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &H_{-n}^{(2)}(k_m r') \exp(-in\theta') = \\ &\sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^a H_{a+n}^{(2)}(2k_m H) J_a(k_m r) \exp(ia\theta) \quad r < 2H \\ &\sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^a J_{a+n}(2k_m H) H_a^{(2)}(k_m r) \exp(ia\theta) \quad r \geq 2H \end{aligned} \right\}$$

式中: $I_a(\cdot)$ 为 a 阶第 1 类修正贝塞尔函数; $J_a(\cdot)$ 为 a 阶第 1 类贝塞尔函数。

对于有限潜深圆柱壳结构, 结构外表面处半径 $r_c \approx R < 2H$, 因此式 (19) 可以进一步表示成以下形式:

$$\phi_P(r, x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} &\phi_{m1,n} \begin{pmatrix} K_n(k_m r) \exp(in\theta) \\ - \sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^{a+n} K_{a+n}(2k_m H) I_a(k_m r) \exp(ia\theta) \end{pmatrix} X_{m1}(k_m x) \\ &+ \phi_{m2,n} \begin{pmatrix} H_n^{(2)}(k_m r) \exp(in\theta) \\ - \sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^{a+n} H_{a+n}^{(2)}(2k_m H) J_a(k_m r) \exp(ia\theta) \end{pmatrix} X_{m2}(k_m x) \end{aligned} \right\} \sin(\omega t) \quad (20)$$

系数 a 与系数 n 地位等价, 因此可以交换级数求和顺序, 将式 (20) 进一步改写为

$$\phi_P(r, x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \begin{aligned} &\left(\phi_{m1,n} K_n(k_m r) - \sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^{a+n} \phi_{m1,a} K_{a+n}(2k_m H) I_n(k_m r) \right) X_{m1}(k_m x) \\ &+ \left(\phi_{m2,n} H_n^{(2)}(k_m r) \exp(in\theta) - \sum_{a=-\infty}^{+\infty} (-1)^{a+n} \phi_{m2,a} H_{a+n}^{(2)}(2k_m H) J_n(k_m r) \exp(ia\theta) \right) X_{m2}(k_m x) \end{aligned} \right\} \exp(ia\theta) \sin(\omega t) \quad (21)$$

圆柱壳壁面与流场交界处需要满足速度连续条件如下:

$$\left. -\frac{\partial \phi_P}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{r=R} \quad (22)$$

将式 (21) 代入式 (22) 中, 并假定周向波数的截断数为 N , 正交化处理后可以得到速度势幅值向量 $\{\xi_{MN}\}$ 和圆柱壳径向位移幅值向量 $\{W_{MN}\}$ 的关系:

$$\{\xi_{MN}\} = [T_s] \{W_{MN}\} \quad (23)$$

式中: $[T_s]$ 为迁移矩阵; $\{\xi_{MN}\} = \{\phi_{m1, -N}, \phi_{m1, -N+1}, \dots, \phi_{m2, N}\}^T$; $\{W_{MN}\} = \{W_{m, -N}, W_{m, -N+1}, \dots, W_{m, N}\}^T$ 。

由伯努利方程可知圆柱壳壁面处的流体动压力 P_f 为

$$P_f = \rho_f \left. \frac{\partial \phi_P}{\partial t} \right|_{r=R} \quad (24)$$

流体做功可以表示为

$$W_f = -\frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} P_f w R d\theta dx \quad (25)$$

最后, 计算由静水压力产生的结构预应力势能能量项。由于本文研究对象为从整体截断而来的舱段结构, 因此静水压力对圆柱壳结构作用方向应包含径向与轴向 2 个方向, 如图 4 所示。

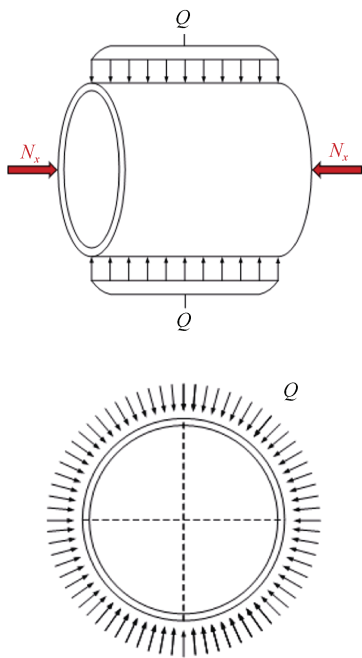


图 4 圆柱壳压力示意图

Fig. 4 Schematic diagram of cylindrical shell pressure

对于受均匀分布压力下的壳体, 由于外表面处分布压力所产生的壳体势能可以表示为^[22]

$$U_p = \pm \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{QL}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right) w \right] d\theta d\xi \quad (26)$$

式中: Q 为壳体外表面单位面积上的静压力; “+”号代表压力为外压; “-”号代表压力为内压。

另外, 有关文献^[11]在研究潜深对圆柱壳振动特性影响时, 除前文所考虑径向静压作用外, 往往还假定壳体中面也作用有轴向压力 N_x 。对于作用于壳体中面的轴向压力 N_x , 其能量项可表示为^[23]

$$W_N = -\int_0^L \int_0^{2\pi} \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} \right] R dx d\theta \quad (27)$$

如假定壳体轴线不可压缩, 则该外力功可进一步表示为

$$W_N = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] R dx d\theta \quad (28)$$

将该能量项代入整个系统能量泛函, 即可得到计及轴向压力的振动特性计算模型。

至此, 整个流-固耦合系统的能量泛函表达式为

$$\Pi = U + U_p + W_N - W_f - T \quad (29)$$

式中: U 为结构总势能, 由壳体结构和加筋结构组成; T 为结构总动能, 组成情况类似。

由于耦合系统的轴向函数在域内正交, 因此只需依次取不同的轴向半波数 M 即可。根据能量变分原理, 对位移未知幅值系数求偏导:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \quad (30)$$

式中, $q = [U_{M, -N}, \dots, W_{M, N}]$ 。

任意轴向半波数下耦合系统振动方程组矩阵化形式如下:

$$([K] - \omega^2 [M]) \{q\} = 0 \quad (31)$$

式中: $[K]$ 为计及有关因素的耦合系统刚度矩阵; $[M]$ 为对应质量矩阵。

2 算例验证

首先, 对本文计算模型处理近水面工况自由液面因素的准确性进行验证, 验证模型为有限潜深的有限长圆柱壳, 参数与文献^[11]相同, 具体参数如表 1 所示。

表 1 耦合系统参数

Table 1 Parameters of coupling system

参数类别	参数名称	参数符号	参数取值
壳体几何参数	长度/m	L_{cy}	1.284
	截面半径/m	R_{cy}	0.18
	厚度/m	h_{cy}	0.003
壳体材料参数	密度/(kg/m^3)	ρ_{cy}	7 850
	泊松比	μ_{cy}	0.3
	杨氏模量/Pa	E_{cy}	2.06×10^{11}
流体参数	密度/(kg/m^3)	ρ_f	1 025

采用梁函数可以模拟不同边界条件下的有限长圆柱壳轴向位移函数^[17], 本文将以两端均为滑移简支边界 (SD-SD) 的圆柱壳为例进行研究, 该边界条件下的壳体轴向位移函数为

$$\begin{cases} X_m(\eta x) = \sin(k_m x) \\ k_m = m\pi/L, m = 1, 2, 3 \dots \end{cases} \quad (32)$$

首先分析本文方法收敛性。当圆柱壳位于无限域时, 迁移矩阵 $[Q]$ 为对角矩阵, 即耦合系统周向模态之间也是解耦状态, 此时周向波数的截断数 N 仅仅只会影响某些模态是否出现而不会影响已经出现的模态结果。但考虑自由液面影响时, $[Q]$ 不再为对角矩阵, 表明耦合系统周向模态之间存在耦合关系, 截断数 N 将对固有频率计算结果存在影响。为了探讨本文方法收敛性, 以潜深 $H=0.2$ m 的工况为例, 计算耦合系统前 10 阶固有频率, 结果如表 2 所示。

表 2 $H=0.2$ m 时不同截断数 N 下耦合系统前 10 阶固有频率

Table 2 Natural frequencies of first 10 orders of coupling system with different truncation numbers N at $H=0.2$ m						
阶数	固有频率/Hz					
	$N=4$	$N=6$	$N=8$	$N=10$	$N=12$	$N=14$
1	103.41	103.40	103.40	103.40	103.40	103.40
2	103.47	103.47	103.47	103.47	103.47	103.47
3	117.55	117.29	117.26	117.26	117.26	117.26
4	117.68	117.41	117.39	117.38	117.38	117.38
5	210.36	209.69	209.60	209.59	209.59	209.59
6	210.43	209.76	209.67	209.65	209.65	209.65
7	223.95	223.77	223.76	223.76	223.76	223.76
8	224.04	223.86	223.85	223.85	223.85	223.85
9	251.61	250.63	250.51	250.50	250.50	250.50
10	251.62	250.64	250.53	250.51	250.51	250.51

从表 2 可以看出, 本文方法收敛性很好, 在截断数 N 达到 10 后, 耦合系统前 10 阶固有频率值已经收

敛。因此本文后续算例均取周向波数截断数为 10。

接着验证本文方法的准确性。将不同潜深工况下本文方法计算结果与 FEM 计算结果进行对比, 结果如表 3 所示。采用有限元软件 Nastran 进行 FEM 数值仿真, 耦合系统的流体部分将由其中的虚拟质量模块实现, 单元数目为 2 400, 此单元数目已可以满足研究结构 1 000 Hz 以下振动计算时任意波长下节点数目大于等于 6, 从而保证计算精度。定义 2 种方法计算结果的百分比误差 Δ 为

$$\Delta = \frac{|f_F - f_P|}{f_F} \times 100 \quad (33)$$

式中, f_F 与 f_P 分别为有限元及本文方法的固有频率计算结果。

从表 3 可以看出, 在不同浸没深度下, 本文方法和 FEM 的计算结果都吻合的很好, 随着壳体浸没深度增加而导致耦合系统同阶次固有频率逐渐降低这一现象在计算结果中得到了体现, 且 2 类计算方法之间的最大百分比误差不超过 1; 除频率值的影响外, 自由液面还将使正反模态的固有频率出现区别, 这点也与真空或无限域流场下的圆柱壳不同。

下面, 对本文计算模型处理大潜深工况静压应力因素的准确性进行验证, 此处验证模型参数与文献[22]相同。模型边界条件为 SD-SD, 具体参数为 $L_{cy}=2\ 000$ mm, $h_{cy}=10$ mm, $R_{cy}=500$ mm, $Q=20$ MPa, $E_{cy}=2.06 \times 10^{11}$ Pa, $\rho_{cy}=7\ 850$ kg/m³ 和 $\mu_{cy}=0.3$ 。本文模型与该文献计算结果对比如表 4 所示。

表 3 不同潜深下本文方法与 FEM 固有频率对比

Table 3 Comparison of natural frequencies of proposed method with that of FEM at different diving depths									
阶数	固有频率/Hz								
	$H=0.21$ m			$H=0.45$ m			无限域		
	本文方法	FEM	Δ	本文方法	FEM	Δ	本文方法	FEM	Δ
1	103.05	103.12	0.07	99.10	99.09	0.01	98.86	98.83	0.03
2	103.11	103.14	0.03	99.13	99.11	0.02	98.86	98.84	0.02
3	115.26	115.71	0.39	109.30	109.87	0.52	109.26	109.83	0.52
4	115.36	115.77	0.35	109.30	109.87	0.52	109.26	109.83	0.52
5	207.40	209.30	0.91	202.46	204.45	0.97	202.45	204.44	0.97
6	207.43	209.33	0.91	202.46	204.45	0.97	202.45	204.44	0.97
7	222.65	223.83	0.53	217.02	218.16	0.52	216.98	218.10	0.51
8	222.74	223.90	0.52	217.03	218.16	0.52	216.98	218.11	0.52
9	247.66	249.60	0.78	241.57	243.63	0.85	241.56	243.62	0.85
10	247.68	249.61	0.77	241.57	243.64	0.85	241.56	243.63	0.85

表 4 本文方法与文献固有频率对比

Table 4 Comparison of natural frequencies of proposed method with that of literature

m	方法 类型	固有频率/Hz					
		$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
1	本文方法	439.1	230.5	249.5	341.2	454.6	583.3
	文献 [22]	439.4	230.5	249.4	341.2	454.7	583.4
2	本文方法	979.2	574.8	405.9	402.8	483.5	601.8
	文献 [22]	979.3	574.9	406.0	402.9	483.6	601.8

从表 4 可以看出, 本文方法在考虑结构静压造

成预应力影响后依旧是准确可靠的。

最后, 对本文计算模型处理环肋加筋结构的准确性进行验证, 验证模型壳体结构参数见表 1。环肋加筋沿壳体轴向上均匀布置有 5 根, 即环肋的轴向坐标位置依次为 $1/6 L_{cy} \sim 5/6 L_{cy}$ 。所有加筋材料为同一材料, 材料参数为 $E_{sti}=2.06 \times 10^{11}$ Pa, $\rho_{sti}=7\ 850$ kg/m³ 和 $\mu_{sti}=0.3$; 此外, 所有环肋均为同一尺寸矩形截面加筋, 即截面宽度 a_{sti} 和截面高度 b_{sti} 均保持一致。将不同加筋尺寸下本文方法计算结果与 FEM 计算结果进行对比, 结果如表 5 所示。

表 5 不同加筋尺寸下本文方法与 FEM 固有频率对比

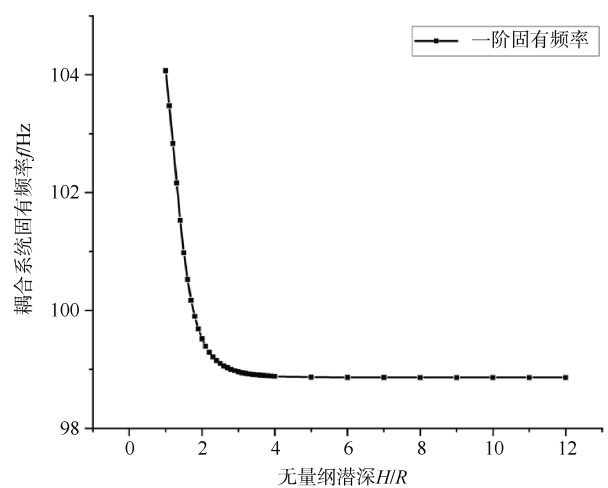
Table 5 Comparison of natural frequencies of proposed method with that of FEM under different reinforcement sizes

阶数	固有频率/Hz							
	无加筋		$a_{sti}=0.006$ m $b_{sti}=0.002$ m		$a_{sti}=0.006$ m $b_{sti}=0.004$ m		$a_{sti}=0.006$ m $b_{sti}=0.008$ m	
	本文方法	FEM	本文方法	FEM	本文方法	FEM	本文方法	FEM
1	234.2	234.2	237.1	237.1	244.1	244.0	274.0	274.0
2	234.2	234.2	237.1	237.1	244.1	244.0	274.0	274.0
3	287.8	287.8	287.0	287.0	286.8	286.8	288.6	288.5
4	287.8	287.8	287.0	287.0	286.8	286.8	288.6	288.5
5	362.8	362.8	369.5	369.5	385.5	385.5	452.1	452.0
6	362.8	362.8	369.5	369.5	385.5	385.5	452.1	452.0
7	487.7	487.7	492.3	492.2	504.2	503.9	547.5	546.9
8	487.7	487.7	492.3	492.2	504.2	503.9	547.5	546.9
9	536.1	536.1	535.4	535.4	536.7	536.6	556.7	555.2
10	536.1	536.1	535.4	535.4	536.7	536.6	556.7	555.2

从表 5 可以看出, 虽然加筋尺寸的增大会带来一定程度上的精度下降, 但整体来说, 本文方法在考虑小尺寸环肋加筋结构影响后依旧是准确可靠的。

3 参数影响分析

首先, 对小潜深工况下自由液面影响进行分析。前文基于表 3 定性地给出了自由液面对固有频率的影响, 为进一步明确固有频率与浸没深度的定量变化规律, 下面将以耦合系统前四阶固有频率为例, 绘制不同无量纲浸没深度下 (浸没深度与结构半径的比值 H/R) 的固有频率变化曲线, 结果如图 5 所示。



(a)一阶固有频率变化曲线

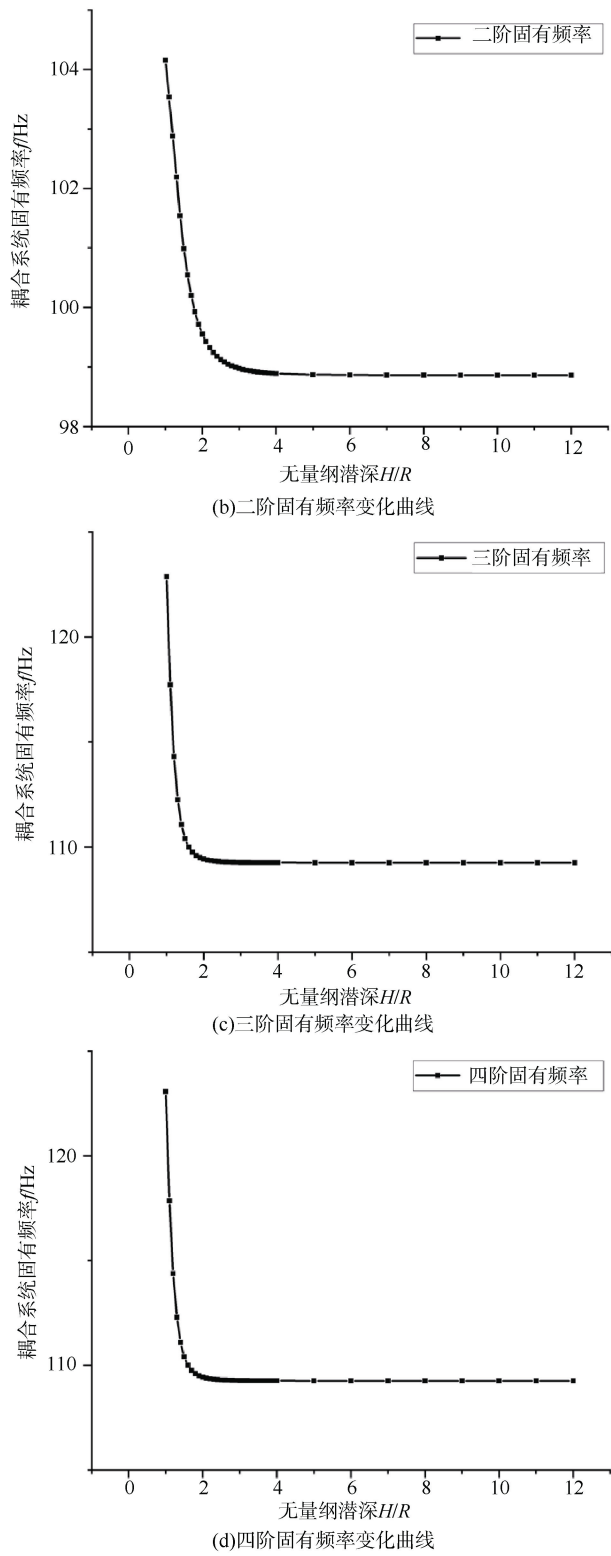


图 5 前 4 阶固有频率随浸没深度变化曲线
Fig. 5 Variation curve of natural frequencies of first 4 orders with immersion depth

从图 5 可以看出,壳体前 4 阶固有频率在无量纲浸没深度 H/R 小于 2 时受浸没深度影响明显,越

靠近自由液面则壳体固有频率将急剧增大;此后,曲线变化平缓,说明自由液面对耦合系统的影响减弱,壳体振动特性趋于稳定。

为确定流场可视为无限域的无量纲浸没深度 H/R 具体取值,定义任意浸没深度下壳体固有频率与对应阶次无限域壳体固有频率的百分比偏差为 $\kappa=(f_H-f_\infty)/f_\infty\times 100$,其中 f_H 为任意浸没深度壳体固有频率, f_∞ 为同阶次下无限域壳体固有频率。本文取壳体前 10 阶固有频率,分析无量纲浸没深度 H/R 变化时各阶固有频率百分比偏差 κ 的大小,结果如表 6 所示。

表 6 不同浸没深度下壳体各阶固有频率与无限域固有频率百分比偏差 κ

阶数	偏差 $\kappa/\%$				
	$H/R=1$	$H/R=2$	$H/R=3$	$H/R=4$	$H/R=5$
1	5.27	0.67	0.10	0.02	0.01
2	5.35	0.70	0.12	0.03	0.01
3	12.46	0.15	0.01	0.00	0.00
4	12.63	0.15	0.01	0.00	0.00
5	7.09	0.03	0.00	0.00	0.00
6	7.21	0.03	0.00	0.00	0.00
7	4.11	0.10	0.00	0.00	0.00
8	4.15	0.11	0.00	0.00	0.00
9	7.32	0.03	0.00	0.00	0.00
10	7.35	0.03	0.00	0.00	0.00

由表 6 可知,无量纲浸没深度 H/R 变化对百分比偏差 κ 的影响呈现典型的非线性关系。这一现象可利用图 3 与式 (20) 进行具体解释。由于图 3 所示镜面效应,式 (20) 中代表虚源与实际结构距离系数为 2,随着浸没深度 H 的增加,虚源距离将以 2 倍增加量远离结构外表面,虚源流体载荷会迅速减小,耦合系统振动特性将自然而然地趋于无限域。

此外,以上计算结果还可以看出自由液面将导致无限域下原本成对出现的壳体正反模态频率出现区别。为解释这一现象出现的原因,还需要对壳体模态振型进行分析。下面将以 $H=0.2\text{ m}$ 及无限域时本文方法和 FEM 得到的前 4 阶模态周向振型为例,结果如图 6 所示。

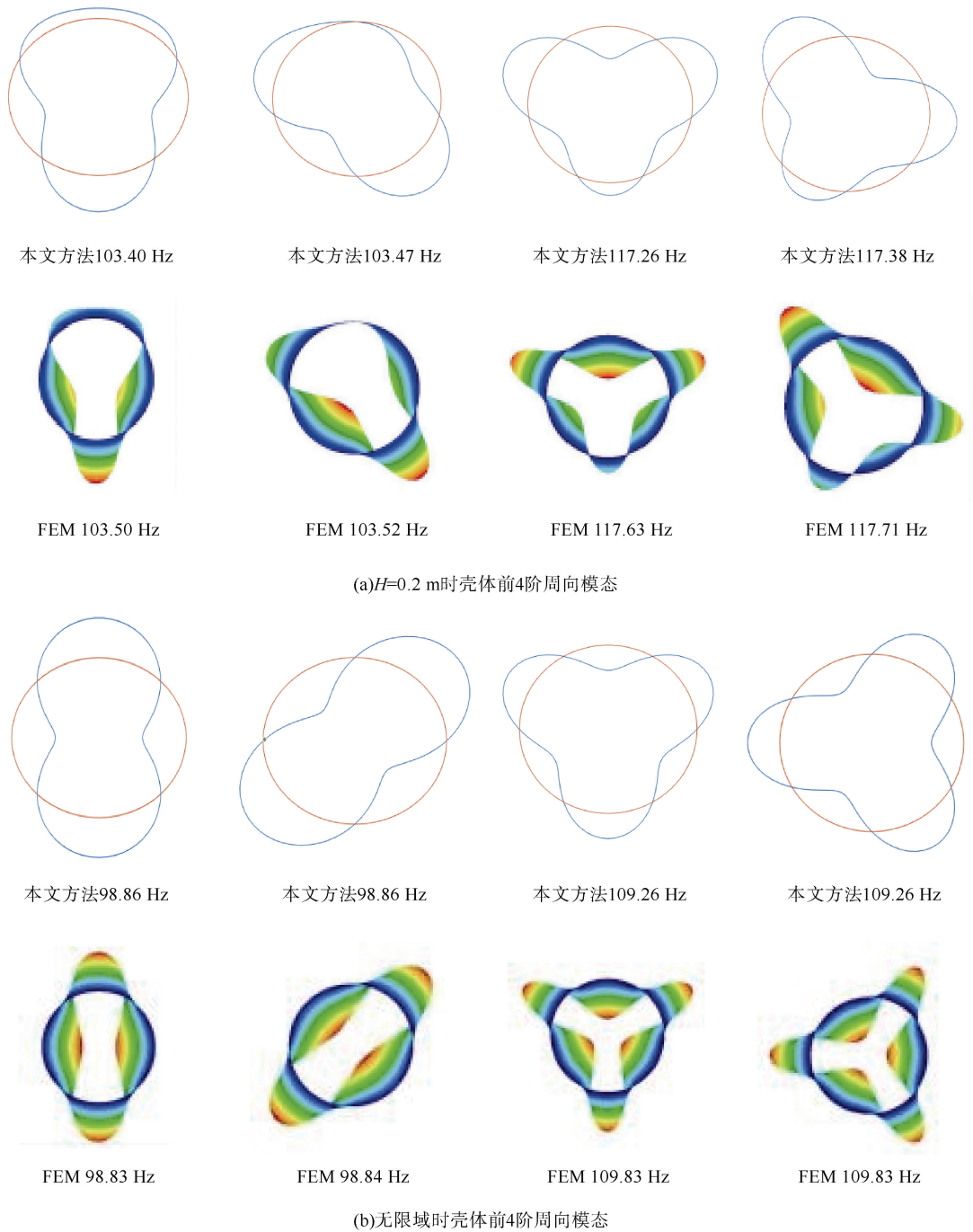


图 6 前 4 阶模态周向振型及固有频率

Fig. 6 Circumferential mode shapes and natural frequencies of first 4 orders

从图 6 可以看出, 无限域时由于耦合系统仍然保持严格周向对称性, 壳体周向振型为成对出现的规则周向振型, 前 4 阶周向振型依次为 $\cos(2\varphi)$, $\sin(2\varphi)$, $\cos(3\varphi)$, $\sin(3\varphi)$, 周向振型之间相互正交且互不耦合, 相同周向波数 n 下不同振型的固有频率相同。当浸没深度较小, 自由液面影响不

可忽略时, 壳体模态振型与无限域情况存在明显区别, 耦合系统周向对称性被打破, 因此壳体振型不再是规则的周向波型, 周向振型将变为不同周向波数 n 振型的线性叠加。但正反模态的不耦合性仍然存在, 即 \cos 系函数与 \sin 系函数不会存在耦合, 因此正反模态的固有频率出现差异。此外, 本文计

算方法与 FEM 的振型吻合良好, 这进一步验证了本文方法的正确性。

接着, 探讨大潜深工况下静水压力因素对圆柱壳固有特性的影响。当水下结构物在大潜深水域中, 随着在水中深度增加, 结构表面静水压力也随之增大,

静水压力对结构振动特性的影响不容忽视。
将本文计算模型针对大潜深工况的数据结果与文献[11]结果进行对比, 尺寸参数参考表 1。表 7 为考虑静水压力影响圆柱壳在水中不同深度时的固有频率。

表 7 圆柱壳在水中不同深度时的固有频率
Table 7 Natural frequencies of cylindrical shell at different water depths

H/R	固有频率/Hz					
	模态 (1, 2)		模态 (1, 3)		模态 (2, 3)	
	本文方法	文献[11]	本文方法	文献[11]	本文方法	文献[11]
5	98.8	98.6	109.2	110.9	216.6	219.1
10	98.3	98.0	108.8	109.6	215.9	217.8
20	97.7	97.8	107.9	108.6	215.0	217.3
40	96.8	97.3	105.9	106.7	212.9	216.2
80	95.9	96.2	101.8	102.6	210.2	214.2
100	94.7	95.3	99.7	100.5	209.3	213.0

从表 7 中可以看出, 随着圆柱壳在水中深度的增加, 耦合系统同一模态固有频率减小。这与相关文献中的圆柱壳模型振动频率随水深的变化规律一致。根据对应水深外压下的壳体固有频率计算结果, 利用最小二乘法拟合获得水深与固有频率平方的关系, 如图 7 所示。

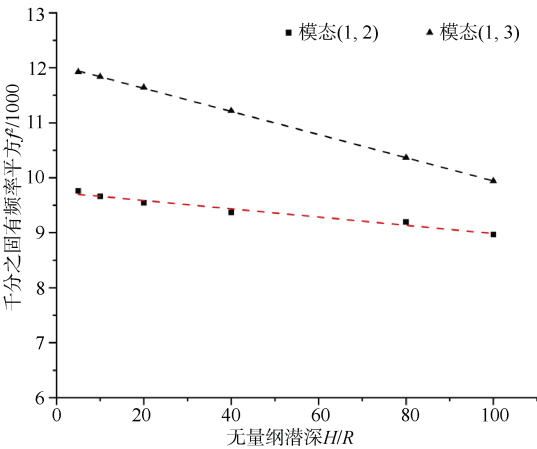


图 7 水下圆柱壳固有频率平方与潜深关系
Fig. 7 Relationship between square of natural frequency of underwater cylindrical shell and submersible depth

由图 7 可知, 对于壳体同一模态, 模态对应固有频率平方与潜深 (静水压力) 成正比。随着潜深增大, 固有频率持续降低, 结构刚度最终会丧失, 固有频率将降为 0, 结构出现弹性失稳。

最后, 探讨壳体内部环肋加筋因素对系统固有特性的影响。圆柱壳结构、流体密度等参数仍采用表 1 计算参数, 潜深 H 定为 100 m, 环肋布置方式、参数则采用表 5 部分计算参数, 环肋宽度 a_{sti} 保持 0.003 m 不变, 改变环肋高度 b_{sti} , 耦合系统固有频率变化情况如图 8 所示。

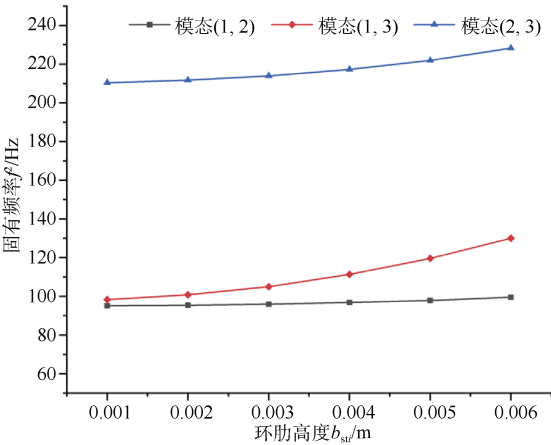


图 8 环肋尺寸变化对耦合系统固有频率变化影响
Fig. 8 Effect of size change of ring rib on natural frequency change of coupling system

从图 8 可以看出, 随着环肋尺寸逐渐加大, 环肋对耦合系统固有频率的影响逐渐显现, 且对大周向波数模态影响更为明显, 这是由于环肋约束效果为保持壳体横截面这一特性所导致的。

4 结束语

基于能量原理,本文提出了一种可求解计及潜深影响的水下环肋圆柱壳耦合系统理论计算方法。通过与公开文献以及有限元软件计算结果的对比,本文方法所建立的计算模型准确性得到了充分验证。对影响参数开展进一步分析后,可得到主要研究结论如下:

1) 当结构潜深处于较小范围时,需重点考虑自由液面的影响。此时,由于整个系统对称性的破坏,壳体模态振型与无限域下壳体振型之间存在明显差异。一方面,自由液面导致壳体周向波耦合,使得壳体振动模态不再规则;另一方面,不对称的正反模态固有频率也存在区别。

2) 随着潜深的增加,自由液面对耦合系统的影响会迅速减弱。此外,当浸没深度达到壳体结构半径的4倍或更大时,可以忽略自由液面的影响。

由于本文研究对象主要针对不改变圆柱壳主要振动模式的小加筋结构,即使引入加强筋后,圆柱壳振动主要还是以轴向和周向的弯曲变形为主,振型较为规则,对静水压力影响的讨论也主要基于这一前提。后续可将大尺寸加强筋结构引入整体模型,重点考虑加强筋局部刚度增强所导致的振型发生改变,针对新的局部振动模式开展研究工作。

参考文献

- [1] 魏建红, 向阳. 无人航行器声隐身性能提升研究[J]. 噪声与振动控制, 2024, 44 (6): 206-211, 272.
- [2] 贾泽坤, 孙孟, 张冠军, 等. 泵设备成组筏架振动传递路径分析及优化设计[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2025, 46 (1): 87-94.
- [3] 陈磊, 李鹏, 陈浩然. 附水复杂圆柱壳的声振分析及实验对比[J]. 西南科技大学学报, 2024, 39 (2): 83-91.
- [4] 潘宇晴, 张鲲, 卢军. 圆柱壳舱段结构低频声振特性仿真分析[C]// 第19届船舶水下噪声学术讨论会论文集. 无锡: 中国造船工程学会船舶力学学术委员会, 2023.
- [5] 陈道仓, 夏兆旺. 基于圆柱壳舱段船舶典型动力设备系统性能分析[J]. 舰船科学技术, 2024, 46 (20): 109-114.
- [6] 刘哲, 王纬波, 吴帅, 等. 空间桁架式舱筏隔振系统模型设计及试验研究[J]. 中国造船, 2024, 65 (6): 10-21.
- [7] 孙旭阳, 周景军, 王谦, 等. 基于声学超材料的鱼雷动力舱段减振方法[J]. 水下无人系统学报, 2024, 32 (6): 1072-1081.
- [8] 雷智洋, 吴崇建, 刘彦, 等. 基于广义变分原理的浮筏-舱段耦合系统声振特性分析[J/OL]. 中国舰船研究. [2025-07-30]. <https://doi-org-443.webvpn.las.ac.cn/10.19693/j.issn.1673-3185.04249>.
- [9] KWAK M K. Free vibration analysis of a finite circular cylindrical shell in contact with unbounded external fluid[J]. Journal of Fluids & Structures, 2010, 26 (3): 377-392.
- [10] MCLEROY E G. Ray analysis of low-frequency sound propagation in shallow water[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1959, 31 (1): 1930-214.
- [11] 刘佩. 潜深对圆柱壳振动声辐射的影响及相似性研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- [12] 毛砚辉. 船体尾部结构流固耦合振动分析和试验研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2018.
- [13] ERGIN A, PRICE W G, RANDALL R, et al. Dynamic characteristics of a submerged, flexible cylinder vibrating in finite water depths[J]. Journal of Ship Research, 1992, 36 (2): 154-167.
- [14] 李天匀, 江丰, 叶文兵, 等. 有限浸没深度无限长圆柱壳辐射声场波动特性[J]. 中国舰船研究, 2013, 8 (1): 73-79.
- [15] 郭文杰, 李天匀, 朱翔, 等. 计及自由液面影响的水下有限深度圆柱壳自由振动分析[J]. 振动与冲击, 2017, 36 (10): 1-6.
- [16] 谢坤. 纵向激励下桨-轴-艇耦合模型声振响应半解析计算方法及特性研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2018.
- [17] 陈忱, 李天匀, 朱翔, 等. 水下环肋圆柱壳弹性失稳临界载荷无损预报方法[J]. 海洋工程, 2014, 32 (4): 89-95.
- [18] 王金朝, 曹贻鹏, 黄齐上, 等. 任意边界条件下环肋圆柱壳振动特性的建模与求解[J]. 固体力学学报, 2017, 38 (3): 271-280.
- [19] LAM K Y, LOY C T. Effects of boundary conditions on frequencies of a multi-layered cylindrical shell[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 188 (3): 363-384.
- [20] LEISSA A W. Vibration of shells, NASA-SP-288[R]. Columbus: Ohio State University, 1973.
- [21] GALLETLY G D. On the in-vacuo vibrations of simply supported, ring-stiffened cylindrical shells, PRNC-TMB-648[EB/OL]. [1958-02-01]. https://dome.mit.edu/bitstream/handle/1721.3/48913/DTMB_1958_1195.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
- [22] LI C F, TANG Q S, SHE H X, et al. Natural characteristic of thin-wall pipe under uniformly distributed pressure[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018 (6): 95.
- [23] 李骁. 复合材料自旋薄壁圆柱壳体动力学特性及共振行为研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2019.

(责任编辑: 曹晓霖)