

[引用格式] 郑俊, 陈玮琪, 魏英杰, 等. 粘性液体空化初生的空泡动力学分析[J]. 数字海洋与水下攻防, 2025, 8(3): 348-356.

# 粘性液体空化初生的空泡动力学分析

郑 俊<sup>1</sup>, 陈玮琪<sup>2</sup>, 魏英杰<sup>3</sup>, 顾媛媛<sup>1</sup>, 王贞涛<sup>1</sup>, 李昌烽<sup>1</sup>

(1. 江苏大学 能源与动力工程学院, 江苏 镇江 212013;  
2. 北京机电工程研究所, 北京 100074;  
3. 哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 450001)

**摘要** 基于 Rayleigh-Plesset (R-P) 方程, 对粘性液体中空泡平衡的稳定性, 空泡爆发过程, 以及爆发强度 (由最大发展速度表征) 进行了分析。稳定性分析表明: 空化初生时, 不可凝结气体不可或缺, 而且应处于等压和等温过程之间, 即多方指数应处于 (0, 1) 之间, 这意味着空化初生由质量扩散和传热共同主导。尤其空化初生刚开始时, 该过程逼近于等压过程。通过计算强烈空化时的空泡早期发展过程可以推测, 空化初生时, 液体表面张力的作用很弱, 表面张力的作用只在空泡发展的中后期呈现出来。另外, 气泡在局部最小尺寸附近的发展速度和最大溃灭速度的表达式表明, 两者的差异程度只与液体粘性效应有关。

**关键词** 空化; 气泡; 稳定性

**中图分类号** O352      **文献标识码** A      **文章编号** 2096-5753(2025)03-0348-09

**DOI** 10.19838/j.issn.2096-5753.2025.03.012

## Analysis of Bubble Dynamics during Cavitation Inception in Viscous Liquids

ZHENG Jun<sup>1</sup>, CHEN Weiqi<sup>2</sup>, WEI Yingjie<sup>3</sup>, GU Yuanyuan<sup>1</sup>, WANG Zhentao<sup>1</sup>, LI Changfeng<sup>1</sup>

(1. School of Energy and Power Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China;  
2. Beijing Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing 100074, China;  
3. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 450001, China )

**Abstract** Based on the Rayleigh-Plesset (R-P) equation, the balance stability, development history, and cavitation intensity (represented by the maximum expansion speed) of bubbles in viscous liquids are analyzed. Stability analysis indicates that incondensable gas is indispensable during cavitation inception, and its polytrophic index falls within the range (0, 1), indicating that cavitation inception is governed by both the mass diffusion of incondensable gas and heat transfer between the liquid and the bubble. Particularly, at the initial stage of cavitation inception, the thermodynamic process closely resembles an isobaric process. By calculations of the intense developments of cavitation bubbles, it can be inferred that the effect of surface tension is weak during the stage of cavitation inception but it becomes evident in the middle and late stages of the development. Additionally, the maximum expansion and collapse speeds near a local minimum bubble size are formulated, and their difference is found to depend on the effect of liquid viscosity.

**Key words** cavitation; bubble; stability

---

收稿日期: 2025-02-28

作者简介: 郑俊 (1983-), 男, 博士, 副教授, 主要从事水动力学研究。

基金项目: 国家自然科学基金项目“基于 SPH 的水下航行体高温可压缩空泡流研究”(11502097)。

## 0 引言

空化初生阶段的气泡动力学研究对于了解空化的产生机理、空化的强度以及空化的发展规律是有一定意义的<sup>[1-5]</sup>, 尤其是气泡的稳定性对于空化初生和溃灭的研究很有意义。

BIRKHOFF<sup>[6]</sup>、PLESSET、MITCHELL<sup>[7]</sup>等人则考察了球形气泡或空泡的形态失稳的问题, 并指出在空泡生长阶段空泡的形态是稳定的, 但在溃灭阶段, 只要气泡的尺寸减少到某个尺度, 空泡就会失去形状的稳定从而溃灭<sup>[4-5, 6-7]</sup>。

针对于临界情况, 也就是环境压强降低到饱和蒸气压时, BLAKE(参考 BRENNEN<sup>[2]</sup>)、NEPPIRAS、NOLTINGK<sup>[8]</sup>等从气泡平衡的稳定性角度做了考察, 并指出不可凝结气体的等压过程(存在较强的质量扩散)一定会导致气泡平衡不稳定, 而在其他热力学过程中, 只要不可凝结气体的压强足够大于表面张力的作用, 平衡就可以稳定<sup>[2, 8]</sup>, 并据此得到了等温情形下, 也就是不可凝结气体无质量扩散时, 气泡平衡的 BLAKE 临界半径和临界(环境)压强。

由此可见, 上述 2 类研究都没有从更一般的空化初生角度来考虑过相关稳定性问题。平衡容易失稳的空化核或空泡, 理论上讲也更容易生长发育。所以从空化初生的角度来考虑平衡的稳定性也是有必要的。值得注意的是, NEPPIRAS 等人的工作并没有考虑液体粘性的影响, 而且 BRENNEN 在导出 BLAKE 平衡稳定性问题时, 假设气泡变化过程中加速度与速度的符号假设为相同<sup>[2]</sup>; 然而, 气泡失稳时, 只要气泡尺寸的增长符号和气泡速度的符号相同即可, 如果对加速度也作如此要求, 条件显得过强了一些。其二, 在其稳定性条件中, 环境压强的影响不存在, 相反只有表面张力和不可凝结气体起作用——这似乎与物理事实有些出入, 即同样的气泡在不同的环境压强下, 其动力学特征显然是有差异的。

所以, 从粘性液体中空化初生的角度出发进行稳定性研究是有一定必要的。

另外, 众所周知, 气泡振荡时, 其最大的生长

速度和最大的溃灭速度总是在其局部最小尺寸附近达到<sup>[9-12]</sup>, 这表现为在相空间( $R$ ,  $dR/dt$ )中, 它的相轨线有很长一段平行于  $dR/dt$  轴, 如图 1(b) 所示。由此可以由 R-P 方程立即得到局部最小空泡尺寸处的最大生长速度和最大溃灭速度的表达式。一定程度上而言, 这对于定量分析汽化强度和凝结强度是有意义的。不过, 这个工作在前人的研究中, 似乎没有进行过具体的呈现。

因此, 本文将从以上几个方面, 对初生阶段的空泡动力学的理论工作进行一定的补充。

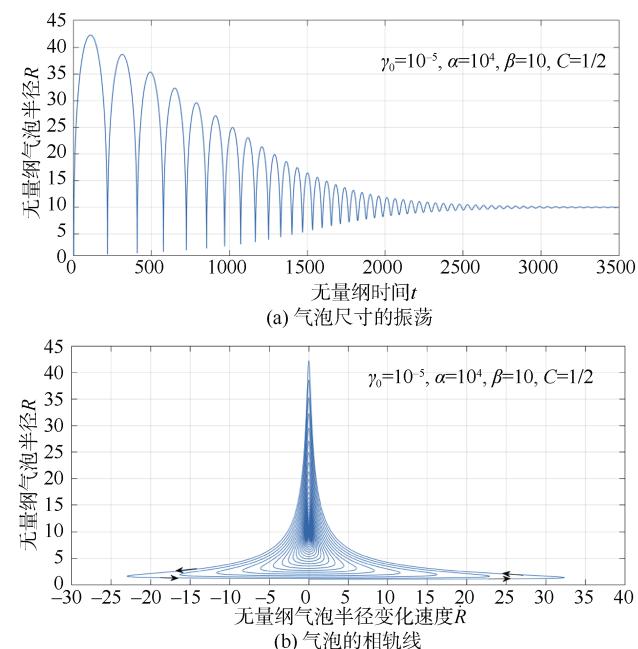


图 1 气泡尺寸的振荡和对应的相轨线图

Fig. 1 Oscillation of bubble size and corresponding phase trajectory

## 1 Rayleigh-Plesset (R-P) 方程及其简化

粘性液体中球形气泡的 R-P 方程如下:

$$r \frac{d^2 r}{d \tau^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{p_v - p_\infty(\tau)}{\rho} + \frac{p_{a0} R_0^{3n}}{\rho} \frac{1}{r^{3n}} - \frac{2S}{\rho} \frac{1}{r} - 4\nu \frac{1}{r} \frac{dr}{d\tau} \quad (1)$$

式中:  $r$  为气泡半径;  $p_v$  为饱和蒸汽压;  $R_0$  为气泡的某个初始尺寸;  $p_{a0}$  为不可凝结气体的初始压强;  $n$  为多方指数;  $p_\infty$  为环境压强;  $S$  为液体的表面张力系数;  $\nu$  为液体的运动粘度;  $\rho$  为液体的密度;  $\tau$  为时间。

采用

$$\begin{aligned}\tau &= t_0 t \\ r &= R_0 R \\ \dot{r} &= U_0 \dot{R}\end{aligned}\quad (2)$$

可以将上面方程写成无量纲的形式

$$R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 + C\frac{\dot{R}}{R} = f(t) + \frac{A}{R^{3n}} - \frac{B}{R} \quad (3)$$

式中,  $U_0$  和  $t_0$  为空泡尺寸变化的特征速度和特征时间, 以及

$$\begin{aligned}f(t) &= -\frac{\sigma(t)}{2} \\ A &= Eu \\ B &= \frac{2}{We} \\ C &= \frac{4}{Re}\end{aligned}\quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \frac{p_\infty(t) - p_v}{\rho U_0^2 / 2} \\ Eu &= \frac{p_{a0}}{\rho U_0^2} \\ We &= \frac{\rho R_0 U_0^2}{S} \\ Re &= \frac{U_0 R_0}{\nu}\end{aligned}\quad (5)$$

利用变量替换

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{R} \\ Y &= \frac{\sqrt{R}^3 \dot{R}}{2C}\end{aligned}\quad (6)$$

可以进一步将 R-P 方程进行简化为

$$Y \frac{dY}{dx} + Y = \eta(t)x^5 + \alpha x^{5-6n} - \beta x^3 \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned}\eta(t) &= \frac{f(t)}{2C^2} \\ \alpha &= \frac{A}{2C^2} \\ \beta &= \frac{B}{2C^2}\end{aligned}\quad (8)$$

具体过程可以参考郑俊等人在文献[12]中的工作。很显然, 从式(1)、(4)、(5)、(8)可以看出:  $\eta$ 、 $\alpha$  和  $\beta$  分别代表相对环境压强, 不可凝结气体以及表面张力的特征大小。如果环境压

强不随时间变化, 那么  $\eta$  是一个常数, 为了方便将它记为

$$\eta(t) = -\gamma_0 \quad (9)$$

这样, 式(7)写为

$$Y \frac{dY}{dx} + Y = -\gamma_0 x^5 + \alpha x^{5-6n} - \beta x^3 \quad (10)$$

同时, 无量纲的初始条件也可以变为

$$R|_{t=0}=1, \dot{R}|_{t=0}=0 \rightarrow Y|_{x=1}=0 \quad (11)$$

注意到式(10)右端可以记为

$$g(x) = \alpha x^{5-6n} - \gamma_0 x^5 - \beta x^3 \quad (12)$$

它恰好就是驱使空泡生长和溃灭的动力因素。

## 2 空泡的平衡稳定性与空化初生

设初始时空泡处于平衡状态, 显然此时式(12)中:

$$g(1) = (\alpha x^{5-6n} - \gamma_0 x^5 - \beta x^3)|_{x=1} = \alpha - \gamma_0 - \beta = 0 \quad (13)$$

即

$$\alpha = \gamma_0 + \beta \quad (14)$$

对式(10)在  $x=1$ ,  $Y=0$  附近摄动展开, 也就是将

$$\begin{aligned}x &= 1 + \delta \\ Y &= 0 + y\end{aligned}\quad (15)$$

代入式(10), 其中  $\delta$  和  $y$  为相应变量的摄动量, 于是

$$y \frac{dy}{d(1+\delta)} + y = g(1+\delta) = -\gamma_0(1+\delta)^5 + \alpha(1+\delta)^{5-6n} - \beta(1+\delta)^3$$

将右边保留到一次项, 并考虑到式(13), 则

$$g(1+\delta) = g(1) + g'(1)\delta = -5\gamma_0\delta + \alpha(5-6n)\delta - 3\beta\delta$$

于是有

$$y \frac{dy}{d\delta} + y = (-5\gamma_0 + \alpha(5-6n) - 3\beta)\delta \quad (16)$$

设在平衡点附近, 式(6)中  $x$  代表的空泡尺寸无限小的尺寸增量  $\delta$  和  $Y$  代表的无限小速度增量  $y$ , 近似

$$y = \omega\delta \quad (17)$$

式中,  $\omega$  为某个系数。 $\omega < 0$  显然代表平衡稳定, 这时空泡尺寸增量大于 0, 但是速度却小于 0; 而  $\omega > 0$ , 显然代表平衡不稳定, 这时空泡尺寸增量和速度的符号相同。将式(17)代入式(16), 立即

可以得到

$$\omega\delta \times \omega + \omega\delta = (-5\gamma_0 + \alpha(5 - 6n) - 3\beta)\delta$$

这样, 就可以整理得到一个一元二次方程

$$\omega^2 + \omega - \varepsilon = 0 \quad (18)$$

其中

$$\varepsilon = \alpha(5 - 6n) - 5\gamma_0 - 3\beta \quad (19)$$

由式 (18) 立即得到 2 个根

$$\omega_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\varepsilon}}{2} \quad (20)$$

显而易见, 它们分别代表稳定和一种潜在不稳定的情况, 只要令式 (20) 中

$$\text{Stable: } \varepsilon = \alpha(5 - 6n) - 5\gamma_0 - 3\beta < 0 \quad (21)$$

就可以让空泡的平衡是稳定的, 相反  $\varepsilon \geq 0$  就是空泡平衡不稳定的, 即

$$\text{Unstable: } \varepsilon = \alpha(5 - 6n) - 5\gamma_0 - 3\beta \geq 0$$

此时有

$$\alpha(5 - 6n) \geq 5\gamma_0 + 3\beta \quad (22)$$

从空泡平衡失稳的角度来看空化初生, 可以看出空化初生的几个必要条件。首先, 不可凝结气体是必须存在的 ( $\alpha \neq 0$ ), 否则式 (22) 左边为 0, 不等式不可能成立; 其次, 不可凝结气体处于等温 ( $n=1$ ) 或绝热过程 ( $n>1$ ) 也是不可能的, 否则式 (22) 左边小于 0, 不等式也是不可能成立的。

另外,  $n=0$  时, 可以发现式 (22) 成为

$$\text{Isobraic Process: } 5\alpha \geq 5\gamma_0 + 3\beta$$

将式 (14) 代入可以得到

$$5(\gamma_0 + \beta) \geq 5\gamma_0 + 3\beta \Rightarrow 5\beta > 3\beta$$

也就是说, 等压过程的空泡平衡肯定是不稳定的, 只要条件保持满足, 空泡就会得到发展。

将不等式 (22) 变形, 得到

$$n \leq \frac{5}{6} - \frac{5\gamma_0 + 3\beta}{6\alpha} = \frac{5}{6} - \frac{5\gamma_0 + 3\beta}{6(\gamma_0 + \beta)} \quad (23)$$

对于常见的空化问题, 将不等式中的参数展开到特征物理量的表达形式, 可以发现:

$$\gamma_0 = \frac{p_\infty - p_v}{2\rho U_0^2 (4/Re)^2} = R_0^2 \frac{p_\infty - p_v}{32\rho v^2} \gg 1$$

$$\beta = \frac{B}{2C^2} = \frac{2/We}{2(4/Re)^2} = \frac{R_0 S}{16\rho v^2} \sim 1$$

于是

$$\lim_{\gamma_0 \gg 1} \frac{5\gamma_0 + 3\beta}{6(\gamma_0 + \beta)} = \frac{5}{6}$$

如此, 不等式 (23) 可以近似简化为

$$n \rightarrow 0$$

由此可以推断, 对于实际情况而言, 空化刚刚起始时, 不可凝结气体非常接近于等压过程 ( $n=0$ )。

考虑一种特殊的平衡问题。假设空化数为 0 时 (也就是环境压强降为饱和蒸汽压), 于是  $\gamma_0=0$ , 此时空泡的平衡条件 (14) 成为

$$\alpha = \beta$$

也就是不可凝结气体和表面张力的作用刚好平衡, 这属于 BLAKE 等人讨论的临界平衡情况。这时候进一步降低环境压强或者流体受到扰动, 空化就会发生。此时平衡失稳或者空化初生的条件 (22) 成为

$$\alpha(5 - 6n) \geq 5\gamma_0 + 3\beta \Rightarrow \beta(5 - 6n) \geq 3\beta$$

由此立即得到

$$n \leq \frac{1}{3} \quad (24)$$

也就是临界平衡失稳导致的空化过程, 也明显伴随着气体的质量扩散和气液间传热。

由于  $n=0$  代表等压过程, 而等压过程意味着不可凝结气体质量的增加或者存在相关的质量扩散; 而  $n=1$  代表等温过程, 且一般假设不可凝结气体质量不变以及液体和空泡之间存在传热。所以, 综上所述, 可以推测, 空化爆发的条件必须是一个同时包含气液间传热和永久气体质量扩散影响的热力学过程 ( $0 < n < 1$ )。这些结论是符合人们关于空化的物理直觉的, 所以有理由推测这些结论是合理的。

接着, 将各参数的定义式 (4)、(5)、(8)、(9) 代入到不等式 (22), 可以将不等式变形为

$$\frac{Eu}{2C^2}(5 - 6n) \geq 5 \frac{\sigma}{4C^2} + 3 \frac{2/We}{2C^2}$$

如此就得到

$$Eu(5 - 6n) \geq \frac{5\sigma}{2} + \frac{6}{We}$$

由此可知, 空泡平衡的稳定性或空化初生与液体是否有粘性无关, 而只取决于不可凝结气

体、环境压强以及表面张力 3 个作用的相对大小以及不可凝结气体的热力学过程。接着，将上面的相似准则数用定义式（5）展开，那么上式就成为

$$p_{a0}(5-6n) \geq 5(p_\infty - p_v) + \frac{6S}{R_0}$$

将它改写为

$$\begin{aligned} p_{a0} &\geq p_\infty - p_v + \frac{2S}{R_0} + \\ &\quad \frac{6n}{5-6n}(p_\infty - p_v) + \frac{12n-4}{5-6n} \frac{S}{R_0} \end{aligned}$$

如果记临界平衡条件<sup>[2]</sup>：

$$p_{aC} = (p_\infty - p_v) + \frac{2S}{R_0}$$

那么上式改写为

$$\begin{aligned} p_{a0} &\geq p_{aC} + \\ &\quad \frac{6n}{5-6n}(p_\infty - p_v) + \frac{12n-4}{5-6n} \frac{S}{R_0} \end{aligned}$$

同样要求满足不等式（24）：

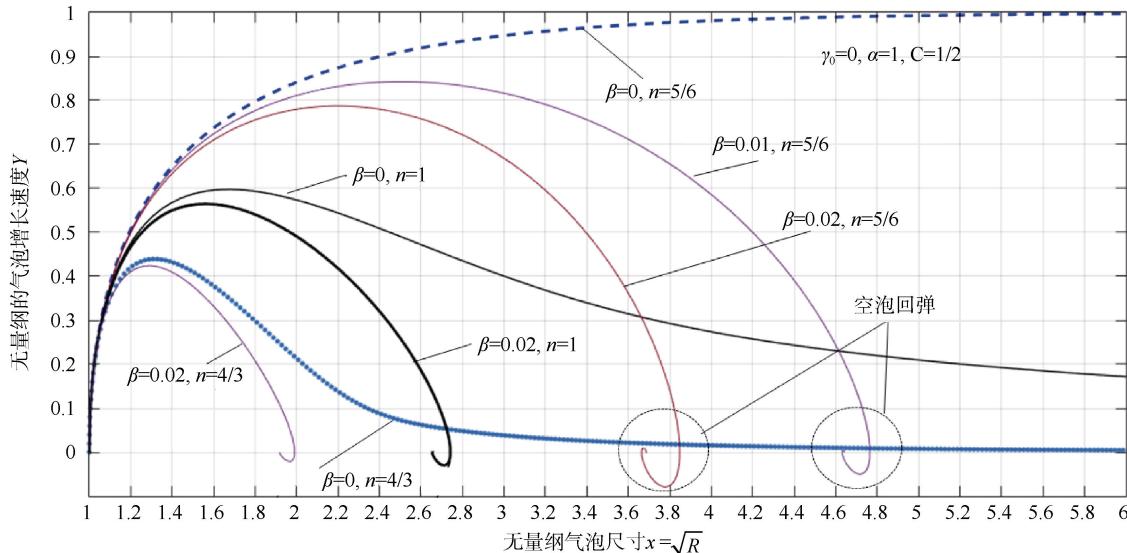


图 2 不同热力学过程的空泡的相轨迹特征

Fig. 2 Features of phase trajectories of cavitation bubbles for different thermodynamic processes

但  $n=5/6$  是一个特殊情形，此时方程被简化为

$$Y \frac{dY}{dx} + Y = \alpha$$

有解析解

$$x = 1 - Y - \alpha \ln \left( 1 - \frac{Y}{\alpha} \right) \quad (26)$$

$$5 - 6n \geq 0 \Rightarrow n \leq 5/6$$

$$12n - 4 \geq 0 \Rightarrow n \leq 1/3$$

说明：要促使空泡平衡失稳而生长，那么泡内的不可凝结气体，强度必须足够大。

### 3 空泡爆发初始阶段的一个特殊解

对于强烈的空化爆发，比如空化数为 0（环境压强等于饱和蒸汽压），而且表面张力作用相对于不可凝结气体的作用很小时：

$$\text{Violent cavitation Bursting: } p_{a0} \gg \frac{2S}{R_0}$$

用无量纲的参数表达，可以表述为

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 0 \\ \alpha &\gg \beta \end{aligned}$$

于是，方程（10）简化为

$$Y \frac{dY}{dx} + Y = \alpha x^{5-6n} \quad (25)$$

对于不同的多方指数  $n$ ，可以得到这个方程的数值解，如图 2 所示。

而且，根据变量的定义（6），可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \dot{R} \Rightarrow t = \int_1^R \frac{1}{\dot{R}} dR \Rightarrow \\ t &= \frac{1}{C} \int_1^x \frac{x^4}{Y(x)} dx = \frac{1}{C} \int_0^Y \frac{x^4}{Y} \frac{dx}{dY} dY \end{aligned}$$

于是， $t$  的表达式为

$$Ct = \left( \begin{array}{l} 4+6\alpha-\alpha Y+10\alpha^2+\frac{\alpha Y^2}{9}+ \\ \frac{28\alpha^3}{3}-3Y+\frac{4Y^2}{3}-\frac{Y^3}{4}-\frac{\alpha^2 Y}{3} \end{array} \right) Y + \right. \\
\left. \left( \begin{array}{l} 6\alpha^2-1+10\alpha^3+\frac{28\alpha^4}{3}+4\alpha+\alpha^2 Y^2- \\ 12\alpha Y+6\alpha Y^2-12\alpha^2 Y-\frac{4\alpha Y^3}{3}-10\alpha^3 Y \end{array} \right) \ln \left( 1 - \frac{Y}{\alpha} \right) + \right. \\
\left. \alpha(2-6\alpha-6\alpha^2-5\alpha^3+12\alpha Y+6\alpha^2 Y-3\alpha Y^2) \ln^2 \left( 1 - \frac{Y}{\alpha} \right) + \right. \\
\left. \alpha^2(-2+4\alpha+2\alpha^2-4\alpha Y) \ln^3 \left( 1 - \frac{Y}{\alpha} \right) + \right. \\
\left. \alpha^3(1-\alpha) \ln^4 \left( 1 - \frac{Y}{\alpha} \right) - \frac{\alpha^4}{5} \ln^5 \left( 1 - \frac{Y}{\alpha} \right) \right)$$

在足够小的时间内, 这个特殊的解析解与含有表面张力影响的解是足够接近的, 而且只会在空泡足够大处产生差异, 如图 2 所示, 因此它对于空泡初生过程的理解有一定的参考意义。根据这个表达式, 可以将空泡初生阶段的生长绘在图 3 中。

从图 2 中可以看到以下几个信息。当表面张力

不存在时 ( $\beta=0$ ), 如果多方指数  $n \geq 1$ , 比如对于绝热空泡, 那么空泡爆发后会发展到无限大, 但发展速度最终趋于 0, 从而最终趋于静止, 这意味着, 只要存在表面张力, 空泡就会出现反弹, 如图 2 所示。然而, 如果多方指数  $n \leq 5/6$ , 那么空泡将可能一直保持高速发展, 空泡将始终无法趋于平衡状态, 这意味着, 如果表面张力系数足够小, 以及不可凝结气体的质量扩散足够强, 那么可能并不会出现显著的空泡回弹。另外, 前面已经说过  $n < 1$  的情形, 是因为存在永久气体或不可凝结气体向空泡内扩散。因此, 对于图 2 中  $n \leq 5/6$  这种始终保持高速增长的空泡, 一般在过饱和液体中是可能存在的。换句话说, 在以气体质量扩散为主导的空泡发展中, 在粘性液体中, 就可能无法形成明显的气泡振荡。最后, 从图 2 可以看到, 当空泡强烈爆发时, 在初始点附近, 无论有没有表面张力作用, 所有的曲线基本是重合的, 因此由  $n=5/6$  这个特殊的解析解来表征最早的空泡发展过程, 其实误差并不大。

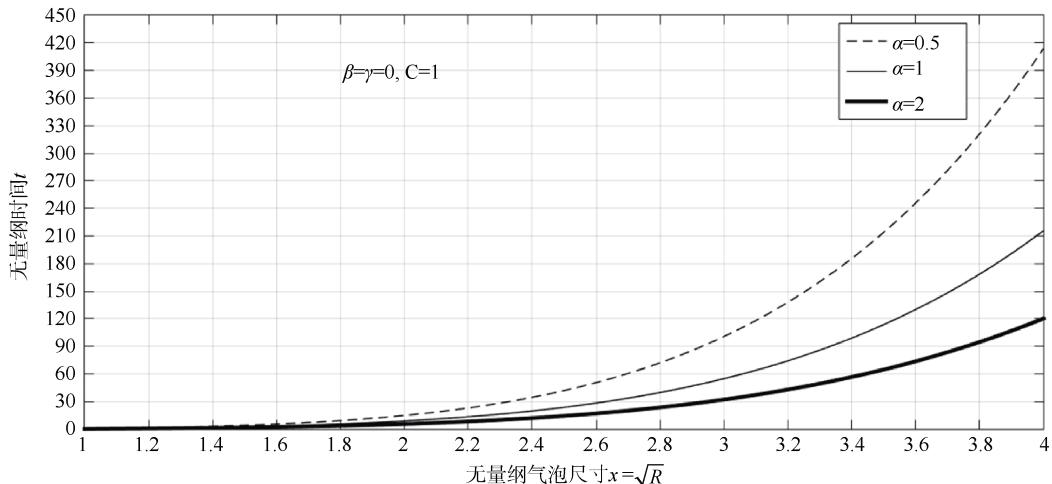


图 3 强烈空化时空化初生阶段的空泡发展  
Fig. 3 Development of cavities during inception stage of violent cavitation

除此之外, 观察图 2 可以看到, 在  $n=5/6$  时, 如果表面张力的影响极其微弱, 那么空泡在粘性液体中的发展速度将趋于一个常数。事实上, 从式 (26) 也可以看出, 这个常数为

$$Y|_{n=5/6, \gamma_0=0, \beta=0} \rightarrow \alpha \quad (27)$$

根据定义式 (6), 可以得到该阶段空泡发展的规律:

$$Y = \frac{\sqrt{R}^3 \dot{R}}{2C} = \alpha \Rightarrow \sqrt{R}^3 \frac{dR}{dt} = 2C\alpha \Rightarrow \frac{2}{5} \frac{d\sqrt{R}^5}{dt} = 2C\alpha$$

此时有

$$\dot{R} = 2C\alpha R^{\frac{3}{2}} \quad (28)$$

这个特征与无粘性液体中的 Rayleigh 空泡的规律<sup>[13]</sup>是相似的, 两者只是相差一个常数。将上面进行积分, 如此可以得到

$$5C\alpha(t-t_E) \approx \sqrt{R^5} - \sqrt{R_E^5}$$

式中,  $R_E$  可以认为是某个时刻  $t_E$  的无量纲空泡半径。

#### 4 局部最大发展速度与最大溃灭速度

获得空泡的最大发展速度和最大溃灭速度, 对于了解空化初生和溃灭的强度是有一定意义的, 另外, 在计算流体力学程序中构建空化模型, 以及估算空化强度或噪声强度等有一定的应用的意义<sup>[14-16]</sup>。

参考图 1 (b) 可以看到: 空泡的最大发展速度和最大溃灭速度都在空泡的局部最小尺寸附近达到, 也就是说在这 2 个速度附近, 存在以下条件:

$$\ddot{R} = 0 \quad \& \quad R \approx 1$$

此时, 由 R-P 方程 (3) 得到

$$3\dot{R}^2 + 2C\dot{R} = -\sigma + 2A - 2B \quad (29)$$

解这个代数方程就可以得到

$$\dot{R}_{\max} \approx \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 3(2A - 2B - \sigma)}}{3} \quad (30)$$

将表达式进行变形:

$$\dot{R}_{\max} \approx \frac{1}{3}(-C \pm C\sqrt{1 + \frac{3(2A - 2B - \sigma)}{C^2}})$$

将其变形:

$$\dot{R}_{\max} \approx \frac{1}{3}\left(-C \pm C\sqrt{1 + 12\left(\frac{A}{2C^2} - \frac{B}{2C^2} - \frac{\sigma}{2C^2}\right)}\right)$$

利用参数定义式 (4)、(8)、(9), 上式改写为

$$\dot{R}_{\max} \approx \frac{C}{3}(-1 \pm \sqrt{1 + 12(\alpha - \beta - \gamma_0)}) \quad (31)$$

也就是

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\max}^{\text{Grow}} &\approx \frac{C}{3}(\sqrt{1 + 12(\alpha - \beta - \gamma_0)} - 1) \\ \dot{R}_{\max}^{\text{Collapse}} &\approx -\frac{C}{3}(\sqrt{1 + 12(\alpha - \beta - \gamma_0)} + 1) \end{aligned} \quad (32)$$

由此可以看到: 在同一个局部最小尺寸处, 局部最大溃灭速度和局部最大生长速度两者相差

$$|\dot{R}_{\max}^{\text{Collapse}}| - \dot{R}_{\max}^{\text{Grow}} = \frac{2C}{3} = \frac{8}{3Re} \quad (33)$$

由此可知, 生长速度和溃灭速度的差异在局部最小尺寸处完全是由液体的粘性阻力引起的。而且雷诺数越小或者液体粘性越大, 这两者的差异就越

大; 雷诺数越大或者液体粘性越小, 这两者的差异就越小——这是符合物理事实的。

当环境超压为 0 时 (环境压强等于饱和蒸气压), 而且表面张力影响较弱时, 上面这 2 个速度的表达式可以进一步简化:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\max}^{\text{Grow}} &\approx \frac{C}{3}(\sqrt{1 + 12\alpha} - 1) \\ \dot{R}_{\max}^{\text{Collapse}} &\approx -\frac{C}{3}(\sqrt{1 + 12\alpha} + 1) \end{aligned} \quad (34)$$

注意到上述最大速度并未考虑到多方指数的取值情况, 所以所估算数值必然与实际数值有差异。

下面, 根据某一工况来对上述公式的合理性进行一定的验证。对于初始半径  $R_0$  为 0.1 mm 的汽核, 大气压  $p_\infty$  为 101 325 Pa, 液体表面张力系数为 0.074 N/m, 液体运动粘度为  $1.0 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, 液体密度为 1 000 kg/m<sup>3</sup>, 并假设气泡尺寸变化特征速度  $U_0$  为 100 m/s, 饱和蒸汽压  $p_v$  为 3 000 Pa 的条件, 可以由式 (4)、(5)、(8) 算得  $\sigma$  为 0.019 67,  $We$  为 13 513.514,  $Re$  为 10 000, 由此得到  $B$  为  $1.48 \times 10^{-4}$ ,  $C$  为 0.000 4, 如此可以算得  $\beta$  为 462.5 以及  $\gamma_0$  为 30 734.375。由此可由平衡条件式 (14) 算得当前汽核在平衡状态时的不可凝结气体的参数  $\alpha$  为 31 196.875。当环境压强突然降低到饱和蒸气压, 此时  $\gamma_0$  成为 0。针对以上工况, 对 R-P 方程式 (3) 进行数值求解来获得准确的空泡最大发展速度, 如图 4 所示。可以发现, 当多方指数为  $n=4/3$  时, 可以算出最大发展速度为 4.53 m/s;  $n=1$  时, 可以算得最大发展速度为 4.89 m/s;  $n=1/3$  时, 可以算得最大发展速度为 6.13 m/s。由公式 (34) 可以估算出该尺寸空化核的最大发展速度为 8.14 m/s。由此可见, 由公式 (34) 估计的空泡最大发展速度在数值上是基本合理的, 相对于由 R-P 方程的数值结果, 两者差异在 24.69%~44.3% 之间, 而且这个差异随着多方指数  $n$  的减小而减小。而且空泡内永久气体处于等压过程 ( $n=0$ ), 准确求解 R-P 方程得到的最大发展速度为 8.15 m/s, 理论估计和准确计算的差异只有 0.12%。前面关于空泡平衡稳定性的讨论中已经推测, 在临界情况下, 空化初生刚开始时, 多方指数  $n$  非常接近于 0。因此, 从工程粗

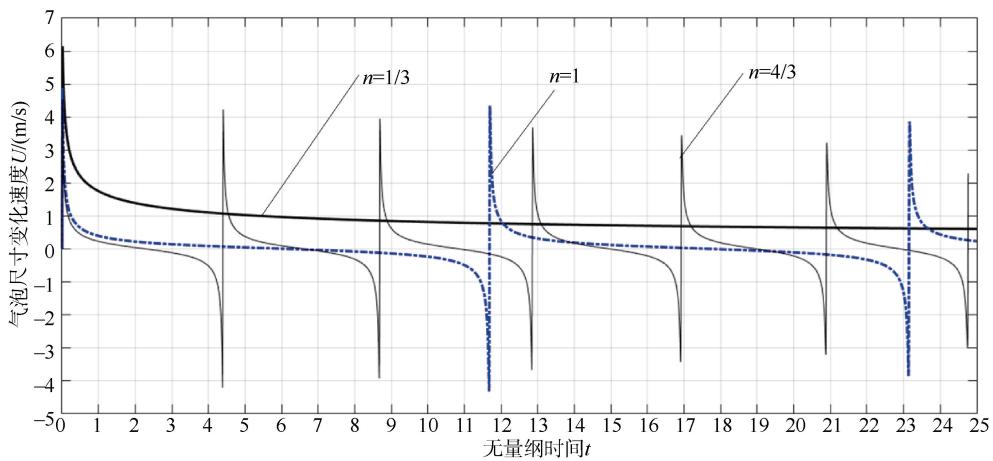


图4 不同热力学过程空泡半径的变化速度

Fig. 4 Change rates in bubble radius for different thermodynamic processes

估的方便性而言, 式(32)以及式(34)给出的估测是可以接受的。

假如将每个气泡都看作单极子(monopole), 那么由该单极子在距离 $l$ 处激发的声压 $p^{\text{Rad}}$ 可以由下式<sup>[13]</sup>计算

$$p^{\text{Rad}} = \frac{1}{l} \rho r (2\dot{r}^2 + r\ddot{r}) \quad (35)$$

该式中二阶导数无法用理论公式准确得到。不过, 从最大声压级的估计角度来看, 这一项只要利用

$$\ddot{r} \sim \dot{r}^2/r$$

也是可行的。这样式(35)可以变化为

$$p_{\max}^{\text{Rad}} \approx \frac{3\rho r \dot{r}_{\max}^2}{l}$$

由于最大发展速度接近于在初始半径 $R_0$ 附近达到(见图1(b)或图4), 将上式用无量纲量的形式进行表达, 可以成为

$$\frac{p_{\max}^{\text{Rad}}}{\rho U_0^2} = \frac{3R_0}{l} \dot{R}_{\max}^2 \quad (36)$$

这对于工程设计粗估而言, 是方便的。对于上述工况, 可以估计处在距离空泡1 000 m的位置, 其最大声压为0.019 Pa左右, 声压级为59.6 dB左右。

另外, 式(32)中的这2个速度可以非常方便地应用于计算流体力学(CFD)中空化模型的发展。比如, 只要将Singhal模型<sup>[17-18]</sup>中的气泡尺寸变化率的相关项

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{3} \left| \frac{p - p_v}{\rho_L} \right|}$$

用式(32)替换为

$$\frac{dr}{dt} = \begin{cases} U_0 \dot{R}_{\max}^{\text{Grow}} \\ U_0 \dot{R}_{\max}^{\text{collapse}} \end{cases}$$

即可。而且, 替换后的空化模型, 不仅包含了环境压强和饱和蒸汽压的差值, 还包含了表面张力以及不可凝结气体的作用。

## 5 结束语

本文利用Rayleigh-Plesset(R-P)方程针对空化初生阶段的气泡动力学进行了考察, 并得到了几个有意义的结果。

从平衡失稳的角度来看, 对于任何空化问题, 空化初生阶段, 气泡内不可凝结气体的热力学过程必须处于等压和等温过程之间, 换句话说, 空泡内存在明显的质量扩散和气液传热现象, 绝热过程是不可能的; 等温和绝热的空泡, 在其平衡位置是稳定的。其二, 对于工程实际情况(环境压强为大气压, 液体为水), 空化初生起始时, 空泡内的热力学过程无限接近等压过程。其三, 液体粘性对空泡平衡的稳定性没有影响。

当空泡处于不平衡情况而强烈爆发时, 尤其环境压强降到饱和蒸汽压时, 表面张力在空化爆发的初始阶段的影响比较微弱, 只在生长发育的中后段产生显著影响。如果液体内的质量扩散效应强度较

大, 比如在过饱和水中, 由表面张力引起的气泡回弹将被大大的削弱, 甚至可能不出现。

另外, 在空泡局部最小尺寸处, 空泡的最大发展速度一定小于空泡的最大溃灭速度, 两者的差异基本只由液体的粘性引起, 粘性越大, 差异越大。

本文结果都是以解析表达式给出的, 可以为空化初生阶段的空泡动力学的理解提供一定的补充。

## 参考文献

- [1] 潘森森, 彭晓星. 空化机理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2013.
- [2] BRENNEN C E. 空化与空泡动力学[M]. 镇江: 江苏大学出版社, 2013.
- [3] 王献孚. 空化泡和超空化泡流动流动理论及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2009.
- [4] 黄继汤. 空化与空蚀的原理及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.
- [5] FRANC J P, MICHEL J M. Fundamentals of Cavitation[M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [6] BIRKHOFF G. Note on Taylor instability[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1954, 12 ( 3 ): 306-309.
- [7] PLESSET M S, MITCHELL T P. On the stability of the spherical shape of a vapor cavity in a liquid[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1956, 13 ( 4 ): 419-430.
- [8] NEPPIRAS E A, NOLTINGK B E. Cavitation produced by ultrasonics: Theoretical conditions for the onset of cavitation[J]. Proceedings of the Physical Society-Section B, 1951, 64 ( 12 ): 1032-1038.
- [9] OHNAWA M, SUZUKI Y. Mathematical and numerical analysis of the Rayleigh-Plesset and the Keller equations[C]// 8th CREST-SBM international Conference on Mathematical Fluid Dynamics, Present and Future. Tokyo: Springer, 2014.
- [10] SUN B H. Influence of physical parameters on the collapse of a spherical bubble[J]. Theoretical and Applied Mechanics Letters, 2022, 12: 100369.
- [11] OH J M, KIM P J, KAN G I S. Chaotic oscillation of a bubble in a weakly viscous dielectric fluid under electric fields[J]. Physics of Fluids, 2001, 13: 2820.
- [12] ZHENG J, WEI Y J, CHEN W Q, et al. A discontinuous cavitation model ( DCM ) [J]. Physics of Fluids, 2024, 36: 083304.
- [13] RAYLEIGH L. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity[J]. Philosophical Magazine, 1917, 34 ( 200 ): 94-98.
- [14] WU P F, BAI L X, LIN W J. On the definition of cavitation intensity[J]. Ultrasonics Sonochemistry, 2020, 67: 105141.
- [15] BLAKE W K. Mechanics of Flow-induced Sound and Vibration: General Concepts and Elementary Sources[M]. Cambridge: Academic Press, 1986.
- [16] JEONG S J, HONG S Y, SONG J H, et al. Numerical method to determine the cavitation inception speed of a submarine propeller based on the noise obtained from bubble dynamics[J]. Ocean Engineering, 2022, 245: 110464.
- [17] 季斌, 程怀玉, 黄彪, 等. 空化水动力学非定常特性研究进展及展望[J]. 力学进展, 2019, 49 ( 46 ): 428-478.
- [18] SINGHAL A K, ATHAVALE M M, LI H, et al. Mathematical basis and validation of the full cavitation model[J]. Journal of Fluids Engineering, 2002, 124: 617-624.

(责任编辑: 曹晓霖)