

【引用格式】张斌, 刘延平. 水下缆索运动建模与仿真分析方法[J]. 数字海洋与水下攻防, 2022, 5 (3): 218-224.

# 水下缆索运动建模与仿真分析方法

张 斌<sup>1, 2</sup>, 刘延平<sup>1, 2</sup>

(1. 中国船舶集团有限公司第七一〇研究所, 湖北 宜昌 443003;  
2. 清江创新中心, 湖北 武汉 430076)

**摘 要** 水下缆索运动建模过程中出现低应力松弛状态、大弯曲或扭转变形等状态, 必须精细划分空间离散微元与时域求解步长以描述缆索曲率变化, 进而避免数值求解奇异, 这种处理方法使得求解水下缆索运动响应效率极为低下, 甚至可能出现数值积分过程中截断误差与舍入误差累加导致的计算错误, 无法描述水下锚泊、拖曳等系统的真实状态。针对精确描述水下柔性缆索的弯曲、扭转等形变状态及其对运动系统数学模型的影响, 采用三次样条插值方法构建水下缆索微元空间形态, 对连续水下缆索进行非线性离散处理, 通过 Galerkin 余量消除方法实现求解域内满足缆索微元空间运动方程要求, 建立了包含弯矩、扭矩作用的水下缆索动态运动数学模型与求解方法。通过与理论数值计算数据及海上实验数据对比分析, 验证了本模型的准确性, 可为水下锚泊系留、水下拖曳等系统的工程应用提供一种高效设计方法。

**关键词** 海洋工程与技术; 水下缆索; 动态分析; 加权余量法; 模型仿真

**中图分类号** P75

**文献标识码** A

**文章编号** 2096-5753(2022)03-218-07

**DOI** 10.19838/j.issn.2096-5753.2022.03.005

## Dynamic Modeling and Simulation Analysis of Underwater Cable

ZHANG Bin<sup>1, 2</sup>, LIU Yanping<sup>1, 2</sup>

(1. No. 710 R&D Institute, CSSC, Yichang 443000, China;  
2. Qingjiang Innovation Center, Wuhan 430076, China)

**Abstract** In the process of underwater cable motion modeling, there will be low stress relaxation, large bending or torsion and other deformations. Therefore, it is necessary to finely divide the spatial discrete micro-elements and the time domain solution step size to describe the cable curvature change and avoid numerical solution singularity. This processing method makes the solution of underwater cable motion response extremely inefficient, and may even cause calculation errors caused by the accumulation of truncation errors and rounding errors in the process of numerical integration, which makes it impossible to describe the real state of underwater mooring, towing and other systems. In order to accurately describe the bending, torsion and other deformation states of the underwater flexible cable and its influence on the mathematical model of the motion system, the cubic spline interpolation method is used to construct the micro-element space form of the underwater cable, and the continuous underwater cable is processed by nonlinear discrete processing. The motion equation of the cable micro-element in the domain is solved by the Galerkin margin elimination method, and the mathematical model and solution method of the dynamic motion of the underwater cable including the bending moment and torque are established. The accuracy of the model is verified by comparison with theoretical numerical calculation data and offshore experimental data, which can provide an efficient design method for the engineering application of underwater mooring, underwater towing and other systems.

**Key words** maritime engineering and technology; underwater cable; dynamic analysis; weighted residual method; model simulation

收稿日期: 2022-05-09

作者简介: 张斌 (1989-), 男, 博士, 高级工程师, 主要从事水下无人系统总体技术研究。

## 0 引言

随着对海洋开发利用的不断深入, 各类水下无人锚泊驻留系统、海洋拖曳系统逐渐成为相关热点研究领域, 准确预报分析锚泊、拖曳等系统在海流等外界环境扰动下的动态运动响应成为其工程设计的关键。其中, 建立用于连接设备、传递或缓冲载荷、传输能源和信号等用途的柔性缆索的运动学与动力学精确建模是一项难点技术。

水下柔性缆索的力学、运动学特征与锚泊、拖曳系统整体状态耦合相关, 并交互影响, 且随着外部载荷变化呈现非线性时变状态, 难以对描述其状态的微分方程进行直接求解, 通常在满足动力学条件和连续性条件下, 采用有限差分<sup>[1-2]</sup>、集中质量<sup>[3-4]</sup>、有限段<sup>[5-6]</sup>等空间域内的物理离散方法对连续缆索控制方程进行近似求解。

在水下缆索中内部张力占主导作用情况下, 可忽略缆索单元空间旋转运动, 上述线性离散化求解方法可取得较好的计算精度和准确性。但在处理多点悬链系留、锚泊状态振荡急剧变化、拖船大范围转向等易于出现缆索低张力松弛、非线性大形变等问题时, 线性离散单元无法准确反映描述缆索空间曲率引起的弯矩、扭矩作用, 难以描述缆索真实空间状态与内力状态, 进而出现数值求解奇异。通过选取大量离散节点进行更加细的线性单元划分来逐渐逼近缆索真实轮廓, 不仅算力消耗剧增, 也面临数值积分截断误差与舍入误差累加问题导致的计算错误。

因此, 本文改进柔性缆索的线性离散化单元为高阶非线性单元, 采用三次样条插值描述缆索微元的空间形态, 通过加权余量法解决插值方法仅能在离散节点位置满足缆索状态微分方程问题, 消除微元长度范围内残差, 提供一种高效、准确求解水下缆索复杂运动状态的新方法。

## 1 水下缆索空间运动数学模型

引入图 1 中所示的惯性坐标系  $O(x_e, y_e, z_e)$ 、缆索局部坐标系  $S(q_1, q_2, q_3)$  以及弗莱纳坐标系  $S(t, n, b)$ 。

对于长度为  $ds$  的缆索微元, 其在流体作用力、

自身体积力、内部张力等共同作用下, 大地坐标系中空间平移与旋转运动的微分控制方程如下<sup>[7]</sup>:

$$\mathbf{F}'_c + \mathbf{h} + \mathbf{w}_c + \mathbf{f} = \mathbf{M}_l \ddot{\mathbf{r}} \quad (1)$$

$$\mathbf{N}'_c + \mathbf{r}' \times \mathbf{F}_c = \mathbf{J} \ddot{\boldsymbol{\omega}} \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{F}_c$  为微元内部张力矢量;  $\mathbf{h}$  为微元长度上的流体作用力;  $\mathbf{w}_c$  为微元水下湿重矢量;  $\mathbf{f}$  为其他外部作用力;  $\mathbf{M}_l$  为缆索微元质量矩阵;  $\mathbf{r}(s, t)$  为缆索微元的空间构型曲线矢量;  $\mathbf{N}_c$  为微元内部的弯矩、扭矩矢量;  $\boldsymbol{\omega}$  为缆索微元的旋转角速度矢量阵。

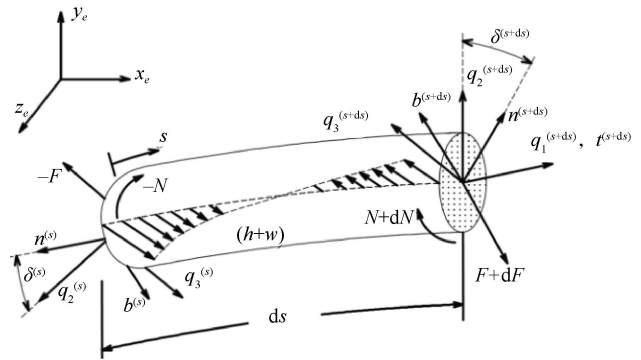


图 1 坐标系选取及水下缆索微元力学状态

Fig.1 Coordinate systems involved and micro-elements force of the cable element

应综合考虑坐标系  $S(q_1, q_2, q_3)$  以及  $S(t, n, b)$  本身不重合导致的角间距  $\delta(s, t)$  偏差, 与缆索微元形状扭转变形共同组成总挠率<sup>[8]</sup>:

$$\tau_{\text{total}} = \tau + \delta' \quad (3)$$

缆索微元内部任一点处力矩矢量可表述为沿弗莱纳坐标系  $b$  轴方向的弯矩以及沿  $t$  轴方向的扭矩<sup>[9]</sup>:

$$\mathbf{N}_c = EIk\mathbf{b} + G\mathbf{I}_p\tau_{\text{total}}\mathbf{t} \quad (4)$$

式中:  $I$  为缆索横截面惯性矩;  $I_p$  为缆索横截面极惯性矩;  $G$  为缆索的材料剪切模量。

水下缆索大长细特性使得其转动惯量矩阵  $\mathbf{J}$  本身较小, 且其法向阻力系数一般以量级差距远大于切向阻力系数, 进一步限制其产生旋转角加速度, 大地坐标系中其旋转控制方程等式右半部分为 2 个极小值乘积, 可认为水下缆索微元内部力与力矩形成近似平衡状态, 可得:

$$\begin{aligned} & (EIk)\mathbf{b} - EIk\tau_{\text{total}}\mathbf{n} + (G\mathbf{I}_p\tau_{\text{total}})'\mathbf{t} + \\ & G\mathbf{I}_p\tau_{\text{total}}\mathbf{kn} + \mathbf{t} \times \mathbf{F}_c = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

与弗莱纳坐标系单位矢量  $\mathbf{t}$  叉乘, 去除上述旋转运动控制方程中沿切向  $\mathbf{t}$  并对内部力矩无影响分量部分, 可得:

$$-(Elk)' \mathbf{n} - Elk \tau_{\text{total}} \mathbf{b} + Gl_p \tau_{\text{total}} k \mathbf{b} + \mathbf{t} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{F}_c) = 0 \quad (6)$$

通过叉乘反交换率与拉格朗日公式计算上式中连续叉乘, 可得到沿水下缆索微元轴向任意位置处的内部张力矢量:

$$\mathbf{F}_c = -(Elk \mathbf{n})' - Elk^2 \mathbf{t} + Gl_p \tau_{\text{total}} k \mathbf{b} + T_c \mathbf{t} \quad (7)$$

式中,  $T_c$  为缆索内部轴向拉力。

通过水下缆索微元空间构型曲线  $\mathbf{r}(s, t)$  描述弗莱纳坐标系各轴线矢量方向, 具体形式如下:

$$\begin{cases} \mathbf{r}' = \mathbf{t} \\ \mathbf{r}'' = k \mathbf{n} \\ \mathbf{r}''' = -k^2 \mathbf{t} + k' \mathbf{n} + k \tau \mathbf{b} \\ k = \|\mathbf{r}''\|_2 \\ \tau = \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r}'' \times \mathbf{r}''') / (\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''') \end{cases} \quad (8)$$

可将内部力  $\mathbf{F}_c$  从弗莱纳坐标系中转换至大地坐标系中, 简化对于弯曲、扭转等力矩作用效果的求解。

水下缆索微元大地坐标系中空间平移运动方程可写为如下形式, 包含了微元中轴向拉力、扭转应力、弯曲应力对于缆索空间形态  $\mathbf{r}(s, t)$  的影响:

$$[(T_c - Elk^2) \mathbf{r}']' + [Gl_p \tau_{\text{total}} (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')] - (El \mathbf{r}'')'' + \mathbf{h} + \mathbf{w}_c + \mathbf{f} = \mathbf{M}_I \ddot{\mathbf{r}} \quad (9)$$

由于水下缆索中扭矩沿轴向连续且恒定, 可知旋转运动控制方程在弗莱纳坐标系  $\mathbf{t}$  轴方向投影必定为 0:

$$(Gl_p \tau_{\text{total}})' = [Gl_p (\tau + \delta)'] = 0 \quad (10)$$

上式给出了坐标系  $S(q_1, q_2, q_3)$  以及  $S(t, n, b)$  本身不重合导致的角间距  $\delta(s, t)$  偏差的计算方法, 进而可以确定坐标系  $S(q_1, q_2, q_3)$  的坐标轴指向。

## 2 水下缆索运动控制方程离散化求解

### 2.1 水下缆索非线性离散化单元构造

由连续缆索运动控制方程计算推导过程可知, 坐标系矢量轴方向、缆索形变量均可通过缆索空间形态  $\mathbf{r}(s, t)$  及角间距  $\delta(s, t)$  求解得到。

在空间域内对水下缆索进行离散化处理, 将其划分为  $N$  段长度为  $ds$  的非线性高阶单元。根据[A1]大地坐标系下节点坐标值  $\mathbf{r}^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, N, N+1$ ) 通过 3 次样条差值方法构造试函数  $\tilde{\mathbf{r}}_i(s, t)$ 、 $\tilde{\delta}(s, t)$  逼近空间样条曲线的真实分布状态, 二阶连续可导既满足空间曲率连续要求, 又能避免更高阶函数带来的额外方程求解问题。

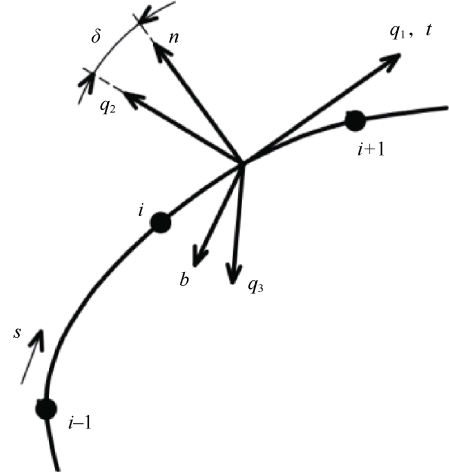


图 2 水下缆索非线性单元划分

Fig.2 Non-linear element of the underwater cable

根据试函数  $\tilde{\mathbf{r}}_i(s, t)$  在各离散点处函数值、一阶导数值、二阶导数值与缆索空间形态  $\mathbf{r}(s, t)$  一致的约束条件, 可得到三次样条插值试函数的基函数及其待定系数:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{i,1} = \mathbf{r}(s^{(i)}) = \tilde{\mathbf{r}}^{(i)} \\ \mathbf{p}_{i,2} = \tilde{\mathbf{r}}'(s^{(i)}) = \tilde{\mathbf{r}}'^{(i)} \\ \mathbf{p}_{i,3} = \mathbf{r}(s^{(i+1)}) = \tilde{\mathbf{r}}^{(i+1)} \\ \mathbf{p}_{i,4} = \tilde{\mathbf{r}}'(s^{(i+1)}) = \tilde{\mathbf{r}}'^{(i+1)} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} a_{i,1} = (s^{(i+1)} - s) / l_u^i \\ a_{i,2} = (a_{i,1}^3 - a_{i,1})(l_u^i)^2 / 6 \\ a_{i,3} = (s - s^{(i)}) / l_u^i \\ a_{i,4} = (a_{i,3}^3 - a_{i,3})(l_u^i)^2 / 6 \end{cases} \quad (12)$$

扭转形变角间距  $\delta(s, t)$  在缆索单元中呈线性分布,  $\tilde{\delta}(s, t)$  的基函数为一次函数, 为方便处理可选用上式中系数  $a_{i,1}$ 、 $a_{i,3}$ , 具体为

$$\tilde{\delta}_i = \delta^{(i)} a_{i,1} + \delta^{(i+1)} a_{i,3} \quad (13)$$

## 2.2 加权余量法求解

插值方法得到的试函数  $\tilde{r}_i(s, t)$ 、 $\tilde{\delta}(s, t)$  仅能保证离散节点处满足缆索运动控制方程要求,在缆索微元长度 (0, ds) 计算域内由于与缆索真实空间形态、扭转形变角间距存在偏差,势必导致代入运动控制方程后产生残数,须通过加权余量法进行消除,具体方程如下:

$$\int_V W_{vi} R_v dV = 0, (i=1, 2, \dots, N, N+1) \quad (14)$$

式中:  $W_{vi}$  是求解域内的权函数;  $R_v$  为试函数偏差产生的计算残数;  $V$  为去除边界后的求解计算域。

选用 Galerkin 方法为求解具体方法,其权函数与基函数一致,可将微分方程转换为一组对称的代数方程,实现计算收敛的同时进一步减小算力需求。对于第  $i$  ( $i=1, 2, \dots, N, N+1$ ) 段非线性缆索微元,其计算域内的余量消除方程为

$$\int_{s^{(i)}}^{s^{(i+1)}} \left[ \begin{aligned} &-(E^i I^i \tilde{r}''') + [(T_c^i - E^i I^i k_i^2) \tilde{r}_i'] + \\ &[G^i I_p^i \tau_{\text{total}}^i (\tilde{r}_i' \times \tilde{r}'')] + \\ &h^i + w_c^i + f^i - M_i^i \ddot{\tilde{r}}_i \end{aligned} \right] a_{i,j} ds = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (15)$$

$$\int_{s^{(i)}}^{s^{(i+1)}} [G^i I_p^i (\tau_i + \delta_i')] a_{i,j} ds = 0, (j=1, 3) \quad (16)$$

对余量消除方程积分可得:

$$[B]_i - ([K_{\text{BEND}}]_i + [K_{\text{AXIA}}]_i + [K_{\text{TORQ}}]_i) [X]_i + [H]_i + [W]_i - [K_{\text{MASS}}]_i [\ddot{X}]_i = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{l_u^i} [\delta^{(i)} - \delta^{(i+1)}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{(i)} + \tau^{(i+1)} \\ -\tau^{(i)} - \tau^{(i+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tau_{\text{total}}^{(i)} \\ \tau_{\text{total}}^{(i+1)} \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中,  $[X]_i$  为试函数  $\tilde{r}_i(s, t)$  待定系数矩阵:

$$[X]_i = [r^{(i)} \quad \tilde{r}^{(i)} \quad r^{(i+1)} \quad \tilde{r}^{(i+1)}]^T \quad (19)$$

受篇幅所限,缆索单元求解域内部张力、流体力、体积力、弯曲力、扭转力等矩阵的具体形式不再赘述<sup>[11-12]</sup>。

方程 (17) - (18) 完整描述了每一段缆索单元空间平移与旋转运动。对于缆索节点  $i$ , 其广义运动速度和加速度在其前后两段缆索单元运动控制方程中体现,将第  $i-1$  段、第  $i$  段单元中关于节点  $i$  的相关项叠加整合,可得节点 1 至节点  $N$  处运动方程:

$$[B] - ([K_{\text{BEND}}] + [K_{\text{AXIA}}] + [K_{\text{TORQ}}]) \begin{bmatrix} r^{(1)} \\ \tilde{r}^{(1)} \\ \vdots \\ r^{(N+1)} \\ \tilde{r}^{(N+1)} \end{bmatrix} + [H] + [W] = [M] \begin{bmatrix} \ddot{r}^{(1)} \\ \ddot{r}^{(2)} \\ \vdots \\ \ddot{r}^{(N+1)} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中:  $[H]$ 、 $[W]$ 、 $[B]$  为各离散节点叠加整合后的流体作用力、缆索质量及浮力矩阵;  $[M]$  为  $(3N+3)$  阶质量矩阵;  $[K_{\text{AXIA}}]$ 、 $[K_{\text{BEND}}]$ 、 $[K_{\text{TORQ}}]$  为各离散节点叠加整合后的轴向张力、弯曲作用力、扭转作用力矩阵,为  $(3N+3) \times (6N+6)$  阶形式矩阵。

对于常见的水下锚泊系统、拖曳系统,缆索上一般无外部额外施加力矩,因此,可将非线性缆索单元的扭转运动约束方程整合为如下形式,计算中需指定水下缆索首节点扭转形变角  $\delta^{(1)}$  或末节点处扭转形变角  $\delta^{(N+1)}$  以固定一个扭转自由度,使得该约束方程左侧系数矩阵变为满秩矩阵,进而获得唯一解。

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{l_u^1} & -\frac{1}{l_u^1} & & & \\ -\frac{1}{l_u^1} & \frac{1}{l_u^1} + \frac{1}{l_u^2} & -\frac{1}{l_u^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{1}{l_u^{N-1}} & \frac{1}{l_u^{N-1}} + \frac{1}{l_u^N} & -\frac{1}{l_u^N} \\ & & & -\frac{1}{l_u^N} & \frac{1}{l_u^N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta^{(1)} \\ \delta^{(2)} \\ \vdots \\ \delta^{(N)} \\ \delta^{(N+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tau^{(1)} + \tau^{(2)} \\ \tau^{(3)} - \tau^{(1)} \\ \vdots \\ \tau^{(N+1)} - \tau^{(N-1)} \\ -\tau^{(N)} - \tau^{(N+1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tau_{\text{total}}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau_{\text{total}}^{(N+1)} \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中,  $\tau_{\text{total}}^{(1)}$  与  $\tau_{\text{total}}^{(N+1)}$  为水下缆索边界处的总绕率,可通过边界节点处的扭矩  $T_B^{(1)}$  及  $T_B^{(N+1)}$  计算得到:

$$T_B^{(1)} = -G^1 I_p^1 \tau_{\text{total}}^{(1)}, T_B^{(N+1)} = G^N I_p^N \tau_{\text{total}}^{(N+1)} \quad (22)$$

### 3 模型验证

#### 3.1 Hopland 拖曳试验验证

采用 1992 年 Hopland 进行的通信光缆拖曳布放实海实验测试数据作为对比算例<sup>[13]</sup>,通过水下缆索运动模型对其重型铠装拖缆在拖船加减速过程中动态变化情况。

该缆索主要物理特性如下:直径 33.2 mm,总长 300 m,密度 3 121 kg/m<sup>3</sup>,弹性模量 77.5×10<sup>9</sup> Pa,抗弯刚度 1 000 N·m<sup>2</sup>,法向阻力系数 1.649,切向阻力系数 0.12。

加速实验过程中,拖船以约 1.1 kn 匀航速拖动缆索达到稳态状态,随后进入加速拖曳阶段,拖船速度在 60 s 时间内均匀增大至 2.4 kn。计算模型仿真计算结果如图 3 所示,图中,  $t=0$  时刻的缆形图对应于 1.1 kn 均匀航速拖曳下缆索状态,  $t=60$  s 时刻,拖船线性加速达到 2.4 kn,由仿真结果可知,拖缆其重新趋于稳态时间滞后约 360 s。

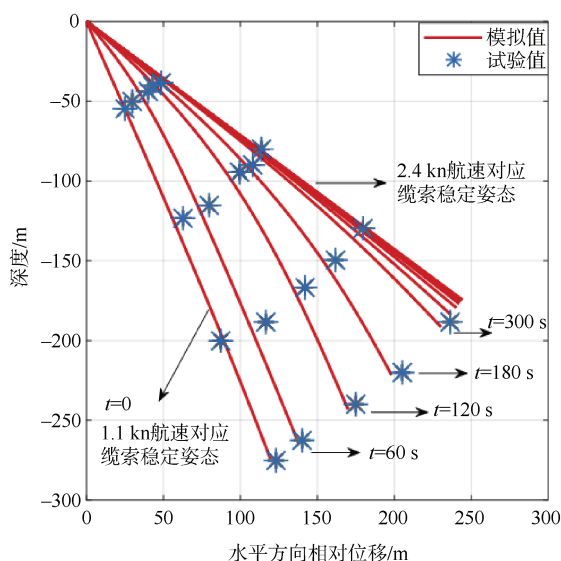


图 3 拖船加速过程 HA 缆姿态变化

Fig.3 Attitude change of HA cable during the towing ship accelerating process

减速实验过程中,拖船以约 2.5 kn 匀航速拖动缆索达到稳态状态,随后进入减速拖曳阶段,拖船速度在 60 s 时间内均匀降低至 1.0 kn。计算模型仿

真计算结果如图 4 所示,图中  $t=0$  时刻的缆形图对应于 2.5 kn 均匀航速拖曳下缆索状态,  $t=60$  s 时刻,拖船线性减速达到 1.0 kn,由仿真结果可知,拖缆重新趋于稳态时间滞后约 460 s。

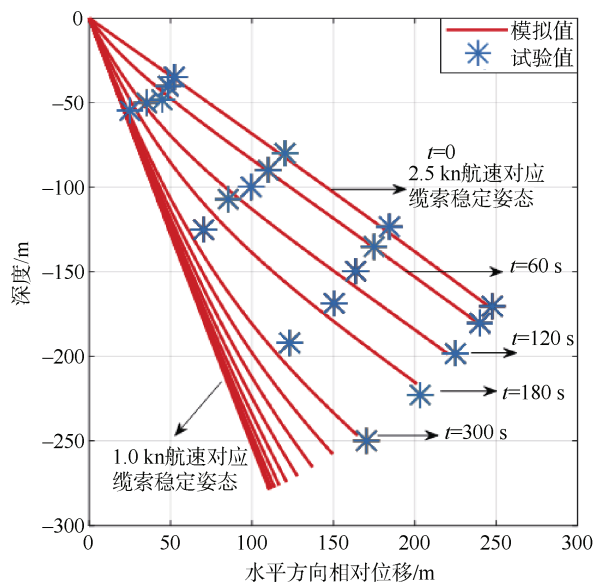


图 4 拖船减速过程 HA 缆姿态变化

Fig.4 Attitude change of HA cable during the towing ship decelerating process

综合上述实验测试缆索形态变化及 Hopland 实测的缆索节点空间位置坐标,可以看到数值模拟数据与实验数据吻合度及变化规律高度一致,仅存在细微偏差,推测是由于实验测量误差及实验过程中海流流速影响等导致。

#### 3.2 细长柔性杆件弯曲变形计算验证

通过与可精确求得解析值的经典细长柔性杆件受力弯曲变形模型进行比对分析,验证本计算模型中高阶非线性微元划分及加权余量方法消除残差趋近物理模型真实空间形态方法的准确性,也直接对模型中弯曲应力的影响结果进行比对分析。

本算例的物理模型为一端固定约束、一段自由的细长柔性杆件,对其末端施加竖直向下集中载荷  $P$ 。由材料力学相关解析求解方法可知,细长杆上任一点处曲率半径如下:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M_{\text{BEND}}}{EI} \quad (22)$$



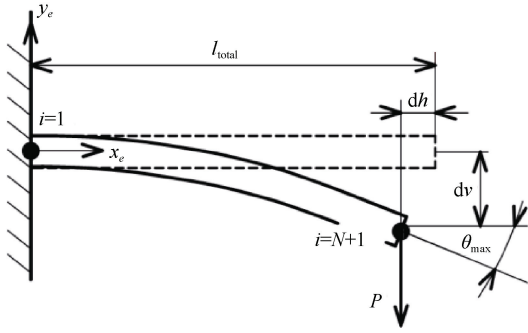


图5 细长柔性杆件弯曲变形计算验证模型  
Fig.5 Bending deformation validation model of flexible rod

式中:  $M_{\text{BEND}}$  为该点位置弯矩;  $E$  为材料弹性模量;  $I$  为杆件的横截面惯性矩;  $\theta$  为该点弯曲变形后绕中心轴转动角度;  $s$  为挠度曲线弧长。

推导可知, 其末端节点的位移量为<sup>[14]</sup>

$$dh = l_{\text{total}} - \sqrt{\frac{2EI}{P}} \sin \theta_{\text{max}} \quad (23)$$

$$dv = \int_s \sin \theta ds = \int_0^{l_{\text{total}} - dh} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} dx \quad (24)$$

其中末端节点做大转角  $\theta_{\text{max}}$  为

$$\theta_{\text{max}} = \arcsin \frac{(l_{\text{total}} - dh)P}{2EI} \quad (25)$$

上述末端节点的位移量、偏转角可通过数值积分求解方法获得准确值。

本算例模型相关计算参数如下: 直径 20 mm、长度 10 m、密度 1 000 kg/m<sup>3</sup>、弹性模量  $2 \times 10^{11}$  Pa。采用高阶非线性离散化模型建立杆件的运动控制方程, 仿真分析不同集中力载荷  $P$  施加状态下杆件形态及末端节点坐标值, 具体结果如图 6 所示。

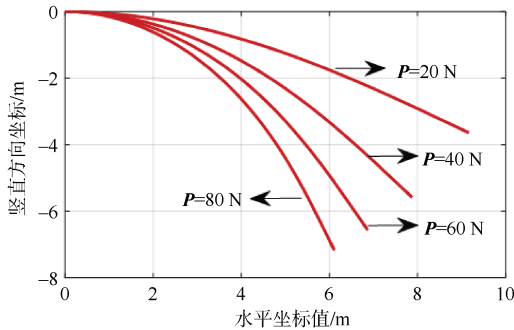


图6 不同集中载荷作用下细长杆平衡姿态  
Fig.6 Torque equilibrium attitude of the flexible rod with different loading

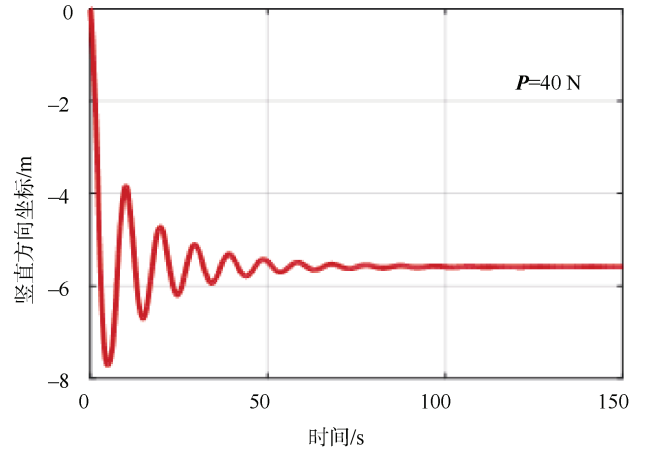


图7 末端节点坐标值随时间变化情况  
Fig.7 Change of the end node's coordinate value with time

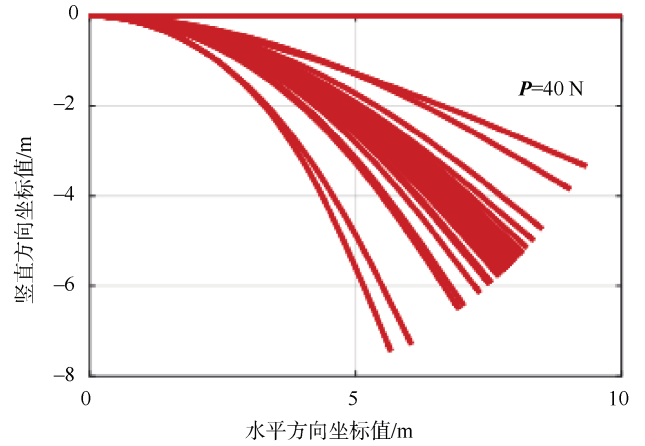


图8 杆件形态随时间变化情况 ( $\Delta t=2$  s)  
Fig.8 Change of the attitude of the flexible rod with time ( $\Delta t=2$  s)

由计算结果可知, 杆件末端节点在集中载荷  $P$  的作用下逐渐偏转, 在弯曲应力与载荷  $P$  共同作用下, 节点在平衡位置附近做欠阻尼振荡并逐渐趋于稳定状态。

不同计算约束条件下, 使用本文建立的运动控制模型求解得到的末端节点坐标值与解析值结果相对误差  $\varepsilon$  如下表所示, 具体计算方法为

$$\varepsilon = \sqrt{(r_{x_e}^{(N+1)} + dh - l_{\text{total}})^2 + (r_{y_e}^{(N+1)} + dv)^2} / l_{\text{total}} \quad (31)$$

由计算结果可知, 通过高阶非线性微元物理离散方法建立的运动控制方程具有较高计算精度。

表1 细长柔性杆件弯曲变形计算结果对比  
Table 1 Comparison of the simulation value and theoretical value of the flexible rod

载荷 $P/N$	末端坐标仿真值/m	末端坐标理论值/m	相对误差/%
20	(9.165, -3.665)	(9.182, -3.654)	2.07
40	(7.877, -5.583)	(7.877, -5.560)	2.30
60	(6.869, -6.568)	(6.843, -6.563)	2.64
80	(6.110, -7.172)	(6.082, -7.170)	2.81

#### 4 结束语

本文将水下缆索线性化离散改进为高阶非线性单元,建立了包含弯矩、扭矩作用的水下缆索状态微分方程数值求解模型,通过与 Hopland 水下缆索拖曳试验数据、细长柔性杆件弯曲变形计算等对比分析,验证了本文高阶离散求解模型的准确性,可为水下锚泊系留、水下拖曳等系统复杂运动状态高效求解与工程设计提供有价值的参考。

#### 参考文献

- [1] 邵成, 艾艳辉, 代军. 水下锚系导弹发射系统运动研究[J]. 兵工学报, 2011, 32(9): 1154-1158.
- [2] 苑志江, 金良安, 迟卫, 等. 海洋拖曳系统的船/缆/体耦合模型研究[J]. 船舶力学, 2016, 20(10): 1252-1261.
- [3] BUCKHAM B J, NAHON M N, SETO M, et al. Dynamics simulation of a towed underwater system, Part I: model development[J]. Ocean Engineering, 2003(30): 453-470.
- [4] 王飞, 丁伟, 邓德衡, 等. 水下多缆多体拖曳系统运动建模与模拟计算[J]. 上海交通大学学报, 2020, 54(5): 441-450.
- [5] 马爱民, 徐德民. 基于虚功原理的复杂水下拖曳系统稳态模型[J]. 舰船科学技术, 2008, 30(5): 67-71.
- [6] VAZ M A, WITZ J A, PATEL M H. Three dimensional transient analysis of the installation of marine cables[J]. ACTA Mechanical, 1997, 124(1): 1-26.
- [7] BURGESS J J. Bending stiffness in the simulation of undersea cable deployment[J]. International Journal of Offshore and Polar Engineering, 1993, 3(3): 197-204.
- [8] BLIEK A. Dynamic analysis of single span cables[D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 1984.
- [9] 苟文选. 材料力学[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2000.
- [10] 司建辉, 李九红, 简政. 非线性无网格伽辽金法的实现[J]. 武汉大学学报(理学版), 2005, 51(S2): 46-50.
- [11] 张斌, 宋保维. 水下驻留航行器锚泊过程动态运动仿真[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2015, 43(4): 102-107.
- [12] 张斌, 宋保维. 驻留型 UUV 锚泊系统运动建模与分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 37(4): 498-502.
- [13] HOPLAND S. Investigation of cable behaviour in water during laying of fiberoptic submarine cables[C]// Proceedings of the Internal Wire and Cable Symposium. St. Louis: 1993.
- [14] 赵泽昂, 邓宗白, 宋平安. 悬臂梁大挠度变形的近似估计法[J]. 力学与实践, 2014, 36(3): 341-344.

(责任编辑: 张曼莉)