

三分量磁传感器定位模型建立及可观测性分析

戴忠华, 周穗华, 单 珊

(海军工程大学 兵器工程学院, 湖北 武汉 430033)

摘 要 针对单个三分量磁传感器的定位理论问题进行了研究, 建立了单个三分量磁传感器的定位理论模型, 并对系统可观测性进行了详细的理论分析。基于磁性目标的点源磁偶极子等效性, 将定位过程中的目标视为匀速运动, 推导得到了单个三分量磁传感器的定位理论模型。基于该定位模型, 利用批量的观测数据对目标运动状态参数进行估计。对于系统可观测性问题, 通过考察 Fisher 信息矩阵的奇异性, 严格证明了单矢量磁传感器的定位系统的不可观测性。根据现实应用情景, 推导了在部分先验条件已知下的可观测性, 得到以下结论: 1) 单个三分量传感器定位模型是不可观测的; 2) 在部分先验已知的条件下, 系统是可观的。最后, 通过仿真试验验证了本文结论的正确性, 为接下来采用单个三分量传感器对汽车、水面舰艇等一些低动态运动目标的跟踪提供了重要的理论依据。

关键词 三分量磁传感器; 定位模型; 可观测性; Fisher 信息矩阵

中图分类号 TP212.13 文献标识码 A 文章编号 2096-5753(2020)04-0295-08

DOI 10.19838/j.issn.2096-5753.2020.04.003

Three-component Magnetic Sensor Positioning Model Establishment and System Observability Analysis

DAI Zhonghua, ZHOU Suihua, SHAN Shan

(Department of Weaponry Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract In this paper, the positioning theory of single three-component magnetic sensor is studied. The positioning theory model of single three-component magnetic sensor is established, and the theoretical observability of the system is analyzed in detail. Based on the equivalence of the point source magnetic dipole of the magnetic target, the target in the positioning process is regarded as a uniform motion, and the positioning theory model of the single three-component magnetic sensor is derived. Based on the model, the target motion state parameters can be estimated using batch observation data. For the system observability problem, by examining the singularity of the Fisher information matrix, the un-observability of the positioning system of the single vector magnetic sensor is strictly proved. According to the actual application scenario, the observability under partial prior known conditions is derived. The following conclusions are drawn: (1) the single three-component sensor positioning model is unobservable; (2) under partial prior known conditions, the system is observable. Finally, the correctness of the conclusion is verified by simulation experiments, which can provide an important theoretical basis for the tracking of some low dynamic moving targets such as cars and surface ships by single three-component sensors.

Key words single three-component magnetic sensor; positioning model; observability; fisher information matrix

0 引言

对运动铁磁性目标的跟踪定位,可利用磁传感器测量的目标磁异常来进行。磁传感器测量获得目标随位置改变的磁场强度信号。与有源跟踪定位系统不同,在对磁性目标的跟踪中不能直接测量得到目标与磁传感器的位置信息,而只能从目标的磁场信息中通过提取技术间接获得。

目前,应用于磁性目标的跟踪定位中的磁传感器,按照磁场测量的类型可以分为标量磁传感器、矢量磁传感器以及由矢量磁传感器构成的磁梯度仪^[1]。标量磁传感器测量的是总场,大多用于运动平台对静止目标的定位中,如文献[2]中分别建立了单个运动标量和2个运动标量的定位模型;文献[3]中设计了标量磁传感器定位阵列,利用阵列测量数据解决磁性目标的定位问题。矢量磁场传感器大多用于静止平台对运动目标的定位,例如文献[4]–[6]中使用多个矢量磁场传感器,利用批量的测量数据,基于磁性目标的等效数学模型,采用最小二乘进行求解;文献[7]–[10]中同样使用2个或者2个以上的矢量磁传感器的观测数据,建立系统动态模型,通过跟踪滤波算法进行目标的跟踪。利用磁梯度仪对磁性目标的定位是近些年研究的热点,因为该方法可以推导出定位封闭解形式,能够较好地实现对目标的实时跟踪定位,并且可用于运动平台的目标跟踪。无论是标量还是矢量传感器,使用多个传感器定位时,首先需要考虑的是磁传感器的布置问题。在一定的传感器分辨率下,2个矢量传感器之间的距离必须满足一定的范围,并且,对于多个矢量传感器,还需解决传感器之间的对准问题,文献[11]–[12]中分别讨论了矢量阵分布和对准误差对定位的影响。同时,在许多现实应用中,受测量平台结构尺寸约束和定位系统低功耗要求,例如水雷引信系统、车辆磁检测系统等,往往无法满足多传感布置,因此,需要研究单矢量传感器的定位问题,这里的单个矢量传感器是指单个三分量磁传感器。文献[13]中详细讨论了单标量磁传感器的定位问题,证明了单标量磁传感器定位模型是不可观测的。对于单个三分量磁传感器的定位问

题,由于单个三分量传感器无法克服运动平台晃动引起的地磁干扰,单个三分量磁传感器只适用于静止平台的定位问题,而静止单个三分量磁传感器的定位研究很少。

本文将对单个三分量磁传感器的定位问题进行研究。建立单个三分量磁传感器定位理论模型,借助可观测性理论,通过考察 Fisher 信息矩阵的奇异性,对定位系统的可观测性进行分析。之后,根据现实应用环境,推导系统可观测的充分条件。

1 定位模型建立

1.1 单个三分量磁传感器量测模型

统计信号处理中,传感器量测模型为

$$y_k = h(x_k) + e_k \quad (1)$$

式中: y_k 为传感器输出; x_k 为系统状态; e_k 为测量过程中的噪声。

通常将磁性目标可以看成点磁偶极子,如图1所示,以传感器坐标系建立跟踪参考坐标系,位于 r 处的磁性目标在传感器处的磁场可由式(2)计算:

$$h(r, m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(r \cdot m)r - \|r\|^2 m}{\|r\|^5} \right) \quad (2)$$

式中: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 为真空磁导率; $r = (x, y, z)^T$ 为目标相对于磁传感器的位置矢量; $m = (m_x, m_y, m_z)^T$ 为目标磁矩。

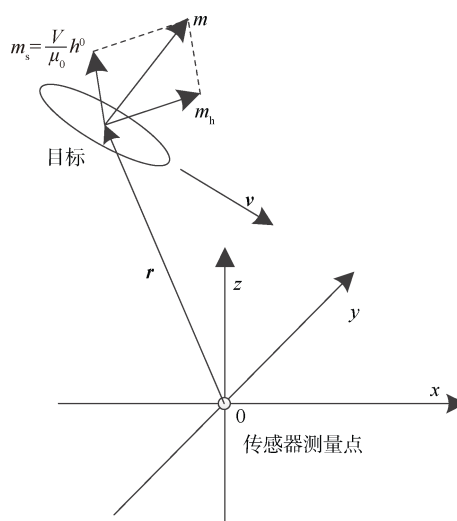


图1 磁传感器测量坐标

Fig. 1 Magnetic sensor measuring coordinate

如图 1 所示, 目标的磁矩参数 \mathbf{m} 通常由固有磁矩 $\mathbf{m}_h = (m_h^x, m_h^y, m_h^z)^T$ 和感应磁矩 \mathbf{m}_s 组成。固有磁矩是目标在建造期间形成的磁化, 在目标的体坐标系中是一个不变的矢量; 感应磁矩是目标在运动过程中受外部磁场磁化而产生, 该部分磁矩的大小与外部磁场的大小相关, 可表示为

$$\mathbf{m}_s = \frac{V}{\mu_0} \mathbf{h}^0 \quad (3)$$

式中: μ_0 为真空磁导率; \mathbf{h}^0 为地磁场矢量; V 为目标的磁化体积系数。

因此, 目标磁矩 \mathbf{m} 可表示为

$$\mathbf{m} = \mathbf{R}_b^s \mathbf{m}_h + \mathbf{m}_s = \mathbf{R}_b^s \mathbf{m}_h + \frac{V}{\mu_0} \mathbf{h}^0 \quad (4)$$

式中, \mathbf{R}_b^s 为由目标体坐标系转换至传感器坐标系的姿态矩阵。

由式 (1) - (4), 可得目标运动过程中, k 时刻时, 位于参考坐标系原点处的单矢量磁传感器的量测模型为

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{r}_k, \mathbf{m}_k) + \mathbf{e}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{m}_k) \mathbf{r}_k - \|\mathbf{r}_k\|^2 \mathbf{m}_k}{\|\mathbf{r}_k\|^5} \right) + \mathbf{e}_k \quad (5)$$

式中: $\mathbf{r}_k = (x_k, y_k, z_k)^T$ 为 k 时刻目标位置; $\mathbf{m}_k = (m_k^x, m_k^y, m_k^z)^T$ 为 k 时刻目标磁矩, $\mathbf{m}_k = \mathbf{R}_{b,k}^s \mathbf{m}_h + \frac{V}{\mu_0} \mathbf{h}_k^0$ ($\mathbf{R}_{b,k}^s$ 和 \mathbf{h}_k^0 分别为 k 时刻目标姿态矩阵和地磁矢量); \mathbf{e}_k 为 k 时刻量测噪声, 通常为独立的高斯噪声, $\mathbf{e}_k \sim N(0, \sigma^2)$ 。

1.2 目标匀速运动状态方程

由磁偶极子磁场计算公式 (2) 可知, 目标的磁场强度随着距离的 3 次方衰减, 对磁性目标的跟踪只能在目标经过传感器的有限范围内进行。同时, 对于跟踪的对象通常为舰船、汽车等一些低动态运动磁性目标, 在目标经过传感器的有限范围内, 可将目标运动视为匀速直线运动。因此, 磁性目标跟踪过程中, 可将目标的运动简化为匀速直线运动。

目标匀速运动模型可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} + T_s \mathbf{v}_{k-1} \\ \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} \end{cases} \quad (6)$$

式中: T_s 为采样时间; $\mathbf{v}_k = (v_k^x, v_k^y, v_k^z)^T$ 是目标运动速度。

在目标匀速经过传感器过程中, 假设目标在运动过程中不会发生自身的偏转, 即目标体坐标系的相对于参考坐标系的姿态角不变, 即 $\mathbf{R}_{b,k}^s = \mathbf{R}_{b,k-1}^s$; 且在目标经过传感器有限范围内, 地磁矢量可以看成不变量, 即 $\mathbf{h}_k^0 = \mathbf{h}_{k-1}^0$ 。因此, 目标磁矩随目标运动的转移模型为

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{R}_{b,k}^s \mathbf{m}_h + \frac{V}{\mu_0} \mathbf{h}_k^0 = \mathbf{R}_{b,k-1}^s \mathbf{m}_h + \frac{V}{\mu_0} \mathbf{h}_{k-1}^0 = \mathbf{m}_{k-1} \quad (7)$$

根据量测方程 (5), 定义 k 时刻目标状态变量为

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{r}_k^T, \mathbf{v}_k^T, \mathbf{m}_k^T)^T = (x_k, y_k, z_k, v_k^x, v_k^y, v_k^z, m_k^x, m_k^y, m_k^z)^T \quad (8)$$

由式 (6) - (8), 可建立目标运动的状态方程:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1} \quad (9)$$

式中状态转移方程 \mathbf{A} 为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & T_s \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (10)$$

则式 (9) 也可表示为

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}(k, 0) \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & k T_s \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (11)$$

式中 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{m}_0^T)^T$ 为初始目标状态。

因此, 单矢量量测模型 (5) 和状态方程 (11) 可建立单矢量磁传感器定位模型:

$$\begin{cases} \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{e}_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{m}_k) \mathbf{r}_k - \|\mathbf{r}_k\|^2 \mathbf{m}_k}{\|\mathbf{r}_k\|^5} \right) + \mathbf{e}_k \\ \mathbf{x}_k = \mathbf{A}(k, 0) \mathbf{x}_0 = \begin{cases} \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_0 + k T_s \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_k = \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{m}_k = \mathbf{m}_0 \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

定位时, 使用有限时间 $[t_0, t_k]$ 内的批量量测数

据 $[y_0, y_1, \dots, y_k]$, 建立 $k+1$ 个方程, 求解方程组便能估计目标初始状态 \mathbf{x}_0 。

2 系统可观测性分析

2.1 单个三轴矢量磁传感器量测模型

系统可观测即使用 $[t_0, t_k]$ 上的观测数据可以唯一确定系统的初值 \mathbf{x}_0 。对于任意给定时刻 t_0 的系统状态变量 \mathbf{x}_0 ($t_0 \in [0, t_f]$, $t_f = \text{final time}$), 其可观测性可以通过 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{I}(t_n, t_0)$ 来衡量^[14-15], 定义如下:

$$\mathbf{I}(t_n, t_0) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{y}_{0:n} | \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0^2} \right] = -E \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}_{0:n} | \mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{x}_0} \right] \right\} \quad (13)$$

式中: $p(\mathbf{y}_{0:n} | \mathbf{x}_0)$ 为给定 \mathbf{x}_0 随机矢量 $\mathbf{y}_{0:n}$ 的条件概率密度函数; $E(\bullet)$ 表示求期望; $\mathbf{y}_{0:n}$ 为时间 $[t_0, t_n]$ 上的观测值, 可以表示为 $n+1$ 个测量值组成的矢量:

$$\mathbf{y}_{0:n} = [y_0, y_1, \dots, y_n]^T \quad (14)$$

由于系统状态变量 \mathbf{x}_0 是根据在给定时间 $[t_0, t_n]$ 上的 $\mathbf{y}_{0:n}$ 求解出来的, 而 \mathbf{x}_0 由式 (8) 可知为 9 维的, 因此, 给定时间 $[t_0, t_n]$ 上必须要多于 9 个观测量, 构造多于 9 个的方程组, 才有可能唯一求解出系统状态 \mathbf{x}_0 , 即 $n \geq 8$ 。

根据式 (12) 可得:

$$\mathbf{y}_{0:n} = [y_0, y_1, \dots, y_n]^T = \left[\mathbf{h}(A(0,0)\mathbf{x}_0), \mathbf{h}(A(1,0)\mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{h}(A(n,0)\mathbf{x}_0) \right]^T + [e_0, e_1, \dots, e_n]^T \quad (15)$$

根据 $e_k \sim N(0, \sigma^2)$ 的独立高斯分布, 则联合条件概率密度 $p(\mathbf{y}_{0:n} | \mathbf{x}_0)$ 可以表示为

$$p(\mathbf{y}_{0:n} | \mathbf{x}_0) = K \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{(y_k - \mathbf{h}(A(k,0)\mathbf{x}_0))^2}{\sigma^2} \right\} \quad (16)$$

式中, K 为标准化常数; $A(k,0)$ 为

$$A(k,0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & kT_s \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, \quad k=0,1,\dots,n \quad (17)$$

将式 (16) 代入式 (13) 求解条件均值, 并利用 e_k 的零均值特性, 则式 (13) 化简表示为

$$\mathbf{I}(t_n, t_0) = \sum_{k=0}^n \nabla \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_0) \sigma^{-2} \nabla \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_0) \quad (18)$$

式中: $\mathbf{h}_k(\mathbf{x}_0)$ 为 $\mathbf{h}(A(k,0)\mathbf{x}_0) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$; $\nabla \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_0)$ 为求雅克比矩阵, 可以表示为

$$\nabla \mathbf{h}_k(\mathbf{x}^0) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}_k), \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}_0} \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \right) = \left(J^r(\mathbf{r}_0, \mathbf{m}_0), kT_s J^r(\mathbf{r}_0, \mathbf{m}_0), J^m(\mathbf{r}_0) \right) \quad (19)$$

由式 (5) - (7) 可得:

$$J^r(\mathbf{r}_0, \mathbf{m}_0) = \frac{3}{\|\mathbf{r}_k\|^5} \left((\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{m}_0) \mathbf{I}_3 + \mathbf{r}_k \mathbf{m}_0^T + \mathbf{m}_0 \mathbf{r}_k^T - 5 \frac{(\mathbf{r}_k \cdot \mathbf{m}_0)}{\|\mathbf{r}_k\|^2} \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T \right) \quad (20)$$

$$J^m(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{\|\mathbf{r}_k\|^5} (3 \mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^T - \|\mathbf{r}_k\|^2 \mathbf{I}_3) \quad (21)$$

式中 $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_0 + kT_s \mathbf{v}_0$ 。

系统的可观测性隐含在信息矩阵之中。当 Fisher 信息矩阵 $\mathbf{I}(t_n, t_0)$ 矩阵满秩时, 系统是可观的, 等价于对于任意的 $n \geq 8$, 时式 (18) 不存在 0 特征值。由此可知, 系统可观测的充分必要条件是: 对于任意给定的 9×1 维非零向量 $\bar{\mathbf{x}}$, 式 (22) 恒成立:

$$\mathbf{I}(t_n, t_0) \bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=0}^n \nabla \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_0) \sigma^{-2} \nabla \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_0) \bar{\mathbf{x}} \neq 0 \quad (22)$$

命题 1: 存在 9×1 维非零向量 $\bar{\mathbf{x}}$, 使得 $\mathbf{I}(t_n, t_0) \bar{\mathbf{x}} = 0$, 其中, $\bar{\mathbf{x}} = (k_1 \mathbf{r}_0^T, k_2 \mathbf{v}_0^T, k_3 \mathbf{m}^T)^T$, k_1 、 k_2 、 k_3 不全为 0。

证明: 由 $\mathbf{I}(t_n, t_0) \bar{\mathbf{x}} = 0$ 可得:

$$\mathbf{I}(t_n, t_0) \bar{\mathbf{x}} = \sum_{k=0}^n \nabla \mathbf{h}_k^T(\mathbf{x}_0) \sigma^{-2} \nabla \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_0) \bar{\mathbf{x}} = 0 \quad (23)$$

即 $\nabla \mathbf{h}_k(\mathbf{x}^0) \bar{\mathbf{x}} = 0$, 将式 (19) 代入 $\nabla \mathbf{h}_k(\mathbf{x}^0) \bar{\mathbf{x}}$ 得:

$$J^r(\mathbf{r}_k, \mathbf{m}_0) (k_1 \mathbf{r}_0 + k_2 k T_s \mathbf{v}_0) + k_3 J^m(\mathbf{r}_k) \mathbf{m}_0 \quad (24)$$

且又由式 (20) - (21) 可知: $J^r(\mathbf{r}_k, \mathbf{m}_0) \mathbf{r}_k = -3 J^m(\mathbf{r}_k) \mathbf{m}_0$, 则将其代入式 (24), 并令其为 0 得:

$$\nabla h_k(\mathbf{x}_0)\bar{\mathbf{x}} = J^r(\mathbf{r}_k, \mathbf{m}_0) \left(k_1 \mathbf{r}_0 + k_2 k T_s \mathbf{v}_0 - \frac{1}{3} k_3 (\mathbf{r}_0 + k T_s \mathbf{v}_0) \right) = 0 \quad (25)$$

要使式(25)恒为0, 则必须满足: 对于任意给定的 \mathbf{r}_0 、 \mathbf{v}_0 , $k_1 \mathbf{r}_0 + k_2 k T_s \mathbf{v}_0 - \frac{1}{3} k_3 (\mathbf{r}_0 + k T_s \mathbf{v}_0)$ 恒为0, 即 k_1 、 k_2 、 k_3 满足:

$$3k_1 = 3k_2 = k_3 \quad (26)$$

所以, 当 $3k_1 = 3k_2 = k_3$, 式(25)成立, 即式(22)成立; 同样, 当 $3k_1 = 3k_2 = k_3 \neq 0$, 式(22)成立, 即存在非零 $\bar{\mathbf{x}} = \lambda(\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, 3\mathbf{m}_0^T)^T$ ($\lambda \neq 0$), 可使得 $\mathbf{I}(t_n, t_0)\bar{\mathbf{x}} = 0$, 即命题1得证。

由命题1可知, Fisher信息矩阵 $\mathbf{I}(t_n, t_0)$ 存在非零的零特征值, 信息矩阵是奇异的, 系统是不可观测的, 即单个三分量磁传感器定位模型是不可观测的。

对于一个不可观测点来说, 其不可观测的物理意义是由批量测量值无法唯一确定状态参数, 也就是由同样的输出可获得多个不同状态值, 即存在状态的多解性。当真实状态参数为 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{m}_0^T)^T$, 根据输出可获得多个状态参数, 除了真实状态参数, 其他的状态参数解由其信息矩阵的零特征向量扩张成, 零特征向量可看成是状态参数多解点在真实状态点上的梯度。从以上推导可知, 零特征值对应的特征向量为 $\bar{\mathbf{x}} = \lambda(\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, 3\mathbf{m}_0^T)^T$ ($\lambda \neq 0$), 由该特征量可获得多解空间。假设多解状态参数为 $\mathbf{x}(u) = (\mathbf{r}_0^T(u), \mathbf{v}_0^T(u), \mathbf{m}_0^T(u))^T$, 其中 u 为尺度参数, 则:

$$\frac{d}{du} \mathbf{x}(u) = \frac{d}{du} (\mathbf{r}_0^T(u), \mathbf{v}_0^T(u), \mathbf{m}_0^T(u))^T = \lambda(u) (\mathbf{r}_0^T(u), \mathbf{v}_0^T(u), 3\mathbf{m}_0^T(u))^T \quad (27)$$

令 $u = \lambda(u)^{-1}$, 则可得状态参数为 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{m}_0^T)^T$ 的多解空间为

$$\mathbf{x}(u) = (\mathbf{r}_0^T(u), \mathbf{v}_0^T(u), \mathbf{m}_0^T(u))^T = (u\mathbf{r}_0^T, u\mathbf{v}_0^T, u^3\mathbf{m}_0^T)^T (u \in R, u \neq 0) \quad (28)$$

将式(28)代入式(12)可知, 输出与参数 u 是无关的, 即当真实参数 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{m}_0^T)^T$ 的输出 $y_{1:k}$ 与其不可观测多解点 $(u\mathbf{r}_0^T, u\mathbf{v}_0^T, u^3\mathbf{m}_0^T)^T$ 的输出是一样的, 也就是说由输出 $y_{1:k}$ 对状态参数的估计 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 可以是真实状态 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{m}_0^T)^T$, 也可能是 $\mathbf{x}(u) = (u\mathbf{r}_0^T, u\mathbf{v}_0^T, u^3\mathbf{m}_0^T)^T$ ($u \in R, u \neq 0$)。造成上述系统不可观测的原因是系统状态参数的估计不是由传感器测量直接获得, 而是利用传感器测量间接完成的, 从而使得系统状态出现多解。由式(27)给出的多解条件, 其物理解释为小目标(磁矩 \mathbf{m} 较小)、慢运动、近距离和大目标(磁矩 \mathbf{m} 较大)、快运动、大距离在传感器处产生的磁场是一样的。

2.2 部分参数先验已知下的单个静止三分量磁传感器模型可观测性

在磁性目标跟踪应用中, 磁性目标跟踪的对象通常为汽车、水面舰艇、潜艇等。这些应用场景中状态参数中的部分参数是先验已知的, 例如, 汽车跟踪过程中位置参数的正横已知; 水面舰艇跟踪过程中, 置于水底的传感器测量深度已知。下面, 在状态参数中部分已知的条件下, 分析系统的可观测性。

2.2.1 位置参数 \mathbf{r}_0 中 y_0 已知时系统的可观测性

在汽车的跟踪过程中时, 磁传感器通常是布放在道路的两侧。对于汽车运动模型中, 传感器相对于道路的距离是已知的, 假若以传感器矢量三轴方向建立跟踪坐标系, 则状态参数 \mathbf{x}_0 的位置参数 \mathbf{r}_0 中部分是已知的, 即 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ 中的 y_0 已知。下面将对 y_0 已知时, 单矢量磁传感器定位模型的可观测性进行分析。

由本文2.1节中的分析可知, 对于真实状态 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{m}_0^T)^T$ 的估计, 多解点为 $\mathbf{x}(u) = (u\mathbf{r}_0^T, u\mathbf{v}_0^T, u^3\mathbf{m}_0^T)^T$ ($u \in R, u \neq 0$)。假设已知 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{r}_0^T, \mathbf{v}_0^T, \mathbf{m}_0^T)^T$ 中 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ 的 y_0 , 现证明是否存在 $u \in R$, 使得 $\mathbf{x}(u) = (u\mathbf{r}_0^T, u\mathbf{v}_0^T, u^3\mathbf{m}_0^T)^T =$

$$(r^T, v^T, m^T)^T。$$

由于状态估计解中已知 y_0 ，即 r 中的 $y = y_0$ ，又 $r = ur_0$ ，所以， $y = y_0 = uy_0$ ，求解得 $u = 1$ 。由上可知，对于真实解 $r_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ 的多解点 $x(u) = x(1) = x_0$ ，多解点与真实解重合，不存在其他解，即在 y_0 已知的条件下，单矢量传感器模型是可观测的。

2.2.2 位置参数 r_0 中 z_0 已知时系统的可观测性

对于水面舰艇的磁定位中，磁测系统通常能够已知自身相对于水面的深度。假若以传感器矢量三轴方向建立跟踪坐标系，则状态参数 x_0 的位置参数 r_0 中部分是已知的，即 $r_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ 中的 z_0 已知，且 $z_0 \neq 0$ 。下面，将对 z_0 已知时，单矢量磁传感器定位模型的可观测性进行分析。

由本文 2.1 节中的分析可知，对于真实状态 $x_0 = (r_0^T, v_0^T, m_0^T)^T$ 的估计，其多解点为 $x(u) = (ur_0^T, uv_0^T, u^3m_0^T)^T$ ($u \in R, u \neq 0$)。假设已知 $x_0 = (r_0^T, v_0^T, m_0^T)^T$ 中 $r_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$ 的 z_0 ($z_0 \neq 0$)，现证明是否存在 $u \in R$ ，可以使得 $x(u) = (ur_0^T, uv_0^T, u^3m_0^T)^T = (r^T, v^T, m^T)^T$ 。

同理，由 3.2.1 节的证明步骤，可得 $x(u) = x(1) = x_0$ ，多解点与真实解重合，不存在其他解，即在 z_0 已知的条件下，单矢量传感器模型是可观测的。对于静止放置于水底的磁传感器，对水面舰艇的跟踪，深度已知 z_0 ，状态参数的估计不会存在多解性，单矢量传感器模型是可观测的。

3 仿真实验

3.1 部分参数先验已知下的单个静止三分量磁传感器模型可观测性

由第 2 节可知，单矢量磁传感器定位模型是不可观测的，对于初值状态的估计存在多解，即利用相同的观测值对系统状态估计，会出现多解，或者说当由 2 个不同初始状态值生成的观测数据是一样的，只要初始状态值满足式 (28)。

设置初始状态值 x_0 如表 1 所示，采样周期

$T_s = 1s$ ，采样点数 $N = 21$ ，生成观测数据。再根据式 (28)，令 $u = 2$ ，则 $x(2) = (2r_0^T, 2v_0^T, 2^3m_0^T)^T$ 。由 $x(u)$ 作为设置初始状态值，同样的采样周期和采样点数，生成观测数据。如图 2 所示，为 x_0 和 $x(2)$ 生成的观测数据点，从图中可知，2 个初始状态值生成的观测数据是相同的，即当利用该观测值估计初始状态值时，无法唯一估计状态参数 x_0 ，会出现多解，即系统不可观测。

表 1 初始状态参数设置
Table 1 Initial state parameter setting

参数	量值
r_0 / m	$[-10 \ -10 \ 5]^T$
$v_0 / (m/s)$	$[1 \ 1 \ 0]^T$
$m_0 / (A \cdot m^2)$	$[10 \ 20 \ 10]^T$

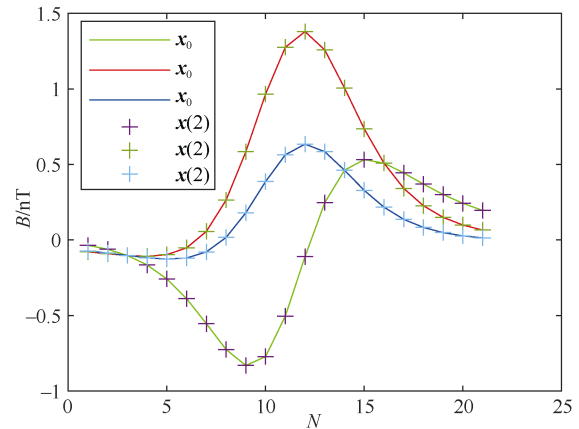


图 2 x_0 和 $x(2)$ 生成的观测数据

Fig. 2 Observation data generated by x_0 and $x(2)$

为进一步验证多解性，由式 (12) 可利用上述的观测数据进行系统状态 x_0 估计，这里可使用加权最小二乘估计：

$$\hat{x}_0 = \arg \min_{x_0} V(x_0) \quad (29)$$

$$V(x_0) = \sum_{k=0}^N (y_k - h_k(x_0))^T \sigma^{-2} (y_k - h_k(x_0)) \quad (30)$$

式中， σ^2 为测量系统的噪声方差。这里，为了验证系统的不可观测性，暂时认为测量系统不存在噪声，则式 (30) 改写为

$$V(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=0}^N (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_0))^T (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_0)) \quad (31)$$

式(29)可使用寻优算法求解。目前, 磁性目标定位中使用较多的是文献[4]中的遗传算法。遗传算法具有较好的全局最优, 这里将使用该方法进行求解。

进行 5 次定位仿真计算, 得到的 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 的结果如

表 2 所示, 并根据式(28)计算了多解点的尺度参数 u 。从表 2 的结果中可以得出, 每次估计的值都不一样, 但是每次估计的值大致都能满足式(28), 可以认为所求的解都为多解空间里的值。这说明无法根据输出唯一确定输入, 系统是无可观测的, 再一次验证了单矢量磁传感器定位模型的不可观测性。

表 2 单个三分量磁传感器定位结果

Table 2 Positioning results of a single three-component magnetic sensor

$\hat{\mathbf{r}}_0 / \text{m}$			$\hat{\mathbf{v}}_0 / (\text{m/s})$			$\hat{\mathbf{m}}_0 / (\text{A} \cdot \text{m}^2)$			u
\hat{x}_0	\hat{y}_0	\hat{z}_0	\hat{v}_x	\hat{v}_y	\hat{v}_z	\hat{m}_x	\hat{m}_y	\hat{m}_z	
-68.3	-69.1	33.1	6.8	6.9	0.03	2.90×10^3	6.06×10^3	3.11×10^3	6.7
-8.2	-7.61	3.84	0.81	0.76	0.018	4.73	9.24	4.65	0.78
-154.3	-160.37	75.9	14.2	16.43	0.15	3.66×10^4	7.27×10^4	3.72×10^4	15.3
-700.8	-706.8	350.1	70.1	70.6	0.20	3.49×10^6	6.97×10^6	3.51×10^6	70
-17.6	-16.7	7.1	1.75	1.65	0.14	50.9	96.1	54.7	1.7

3.2 部分先验已知时系统可观测性验证

由 2.2.2 节的讨论可知, 在部分先验 (参数 y_0 或者 z_0) 已知的条件下, 系统是可观的。现以水面舰艇目标定位为例, 按照 3.1 节中表 1 的初始数据生成的结果, 估计过程中同样利用式(29) - (31) 进行最小二乘估计, 在求解式(29)时, 使用遗传算法进行。得到的估计 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 结果如表 3 所示, 图 3 为公式(31)的值随遗传算法迭代的变化情况。

表 3 部分先验已知时的估计结果

Table 3 Estimated results with partial priors known

参数	量值
$\hat{\mathbf{r}}_0 / \text{m}$	$[-10.4 \ -9.6 \ 5]^T$
$\hat{\mathbf{v}}_0 / (\text{m/s})$	$[1.03 \ 0.95 \ 0]^T$
$\hat{\mathbf{m}}_0 / (\text{A} \cdot \text{m}^2)$	$[10.07 \ 19.67 \ 10.20]^T$

注: 已知 $z_0=5 \text{ m}$; $v_0^z=0$ 。

从图 3 的结果可以看到, 随着迭代次数的增加, $V(\mathbf{x}_0)$ 的值逐渐收敛, 越来越小, 说明遗传算法求解的值是在不断向真实值靠近的。从表 3 的估计结果可知, 对比真实状态值 (如表 1 所示), 估计值 $\hat{\mathbf{x}}_0$ 和真实 \mathbf{x}_0 的偏差很小, 几乎相等, 表明在

先验已知 z_0 、 v_0^z 的条件下, 单个三分量磁传感器定位模型是可观的。

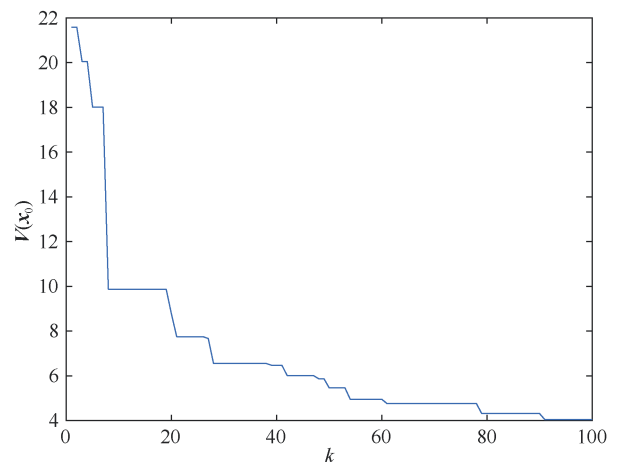


图 3 $V(\mathbf{x}_0)$ 随迭代次数的变化情况

Fig. 3 $V(\mathbf{x}_0)$'s changes with the number of iterations

4 结束语

本文主要对单个三分量磁传感器的定位模型建立及系统可观测性 2 个重要的理论问题进行了研究, 通过推导得到了单个三分量磁传感器的定位模型。对于系统可观测性问题, 通过考察 Fisher

信息矩阵的奇异性,证明了单个三分量磁传感器的定位系统的不可观测性;根据现实应用情景,推导了在部分先验条件已知下的可观测性。最后,通过仿真试验验证了本文结论的正确性:1)单矢量传感器定位模型是不可观测;2)在部分先验已知的条件下,例如已知位置参数中的部分量,系统是可观测的。

虽然在理论上建立了单个三分量磁传感器定位模型并推导了系统可观测性,但这只是解决了单矢量磁传感器是否可观测的问题。从本文的仿真试验中可以看出,利用遗传算法对位置参数进行估计时,尽管剔除了观测噪声,但估计结果都会存在一定程度的偏差。这是由于遗传算法并不能保证每次求解都能准确得到高维、强非线性函数的最优解。因此,需要研究针对本定位模型的适用的求解算法。本文提出的定位模型稍作修改后,便可应用跟踪滤波算法进行磁性目标的实时跟踪。利用滤波算法跟踪,可以在一定程度上避免观测噪声的影响,但是需要考虑观测模型的高维非线性问题。要对一般的非线性滤波算法进行改进,才能应用到磁性目标跟踪上。接下来,也将着力研究适用于单个三分量磁性目标实时跟踪的滤波算法。

参考文献

- [1] 林君,刁庶,张洋,等. 地球物理矢量场磁测技术的研究进展[J]. 科学通报, 2017, 62(23): 2606-2618.
- [2] 王金根,龚沈光. 基于运动标量磁强计的磁性目标定位问题研究[J]. 电子学报, 2002, 30(7): 1057-1060.
- [3] 张晓峻,康曦元,樊黎明,等. 地磁总场测量阵列对磁性目标定位的方法[J]. 地球物理学报, 2019, 62(5): 1921-1928.
- [4] ALIMI R, WEISS E, RAMCOHEN T, et al. A dedicated genetic algorithm for localization of moving magnetic objects[J]. Sensors, 2015, 15(9): 23788-23804.
- [5] SHEINKER A, LERNER B, SALOMONSKI N, et al. Localization and magnetic moment estimation of a ferromagnetic target by simulated annealing[J]. Measurement Science & Technology, 2007, 18(11): 3451-3457.
- [6] KOZICK R J, SADLER B M. Algorithms for tracking with an array of magnetic sensors[C]// 2008 5th IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop. US: IEEE, 2008.
- [7] WAHLSTROM N, CALLMER J, GUSTAFSSON F, et al. Single target tracking using vector magnetometers[C]// 2011 IEEE International Conference on Acoustics. US: IEEE, 2011.
- [8] WAHLSTROM N, GUSTAFSSON F. Magnetometer modeling and validation for tracking metallic targets[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 62(3): 545-556.
- [9] HOSTETTLER R, DJURIC P M. Vehicle tracking based on fusion of magnetometer and accelerometer sensor measurements with particle filtering[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2014, 64(11): 4917-4928.
- [10] 吴垣甫,孙跃. 基于递推更新卡尔曼滤波的磁偶极子目标跟踪[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(9): 1805-1812.
- [11] 迟钺,吕俊伟. 磁梯度张量系统结构的比较分析[J]. 指挥控制与仿真, 2019, 41(1): 46-49.
- [12] 张宁,王三胜,李华. 磁性目标定位误差分析及修正[J]. 电子测量与仪器学报, 2017, 31(11): 1719-1724.
- [13] 王金根. 航空磁探系统中目标信号检测与磁性目标定位研究[D]. 武汉: 海军工程大学, 2001.
- [14] JAUFFRET C, PILLON D. Observation in passive target motion analysis[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 24(3): 575-578.
- [15] SONG T L. Observability of target tracking with range-only measurements[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1999, 24(6): 383-387.

(责任编辑: 曹晓霖)