

【引用格式】杨明智, 胡敏, 汪柏松, 等. 大功率超低频膜结构电磁声源振动特性研究[J]. 数字海洋与水下攻防, 2024, 7(2): 146-155.

大功率超低频膜结构电磁声源振动特性研究

杨明智^{1,2}, 胡敏^{1,2}, 汪柏松³, 高兵⁴, 赵能桐⁴

(1. 中国船舶集团有限公司第七一〇研究所, 湖北 宜昌 443003; 2. 清江创新中心, 湖北 武汉 430076;
3. 国网浙江省电力有限公司杭州供电公司, 浙江 杭州 311500; 4. 国家电能变换与控制工程技术研究中心(湖南大学), 湖南 长沙 410082)

摘要 膜结构电磁式声源具有体积位移大、超低频声场可控、适装性佳等显著优势, 在扫雷声源方面具有广阔的应用前景。辐射膜是声源核心振动部件, 研究辐射膜的振动特性对于电磁声源的设计及应用具有重要意义。研究了一种膜结构电磁声源振动特性的解析方法。首先, 建立真空中电磁声源圆环膜自由振动的解析模型。其次, 采用分离变量法求解得到真空中圆环膜自由振动的固有频率和振型, 通过与文献数据对比及有限元仿真验证了理论解的正确性。然后, 分析了不同边界条件下和圆环膜半径的变化对膜在真空中的振动特性的影响。最后, 考虑声源实际水下工况粘性液体负载与内部填充压力的影响, 得到了电磁声源实际工况中不同尺寸圆环膜低频强迫振动的幅频特性与声源振动体积位移。所提方法可较准确地反映实际工况下电磁声源振动特性与声辐射能力, 可为大功率电磁声源的设计和结构优化提供重要参考。

关键词 圆环膜; 电磁声源; 分离变量; 频率特性

中图分类号 TM 57 文献标识码 A 文章编号 2096-5753(2024)02-0146-10

DOI 10.19838/j.issn.2096-5753.2024.02.002

A Study on Vibration Characteristics of High-power Ultra-low Frequency Membrane-type Electromagnetic Acoustic Sources

YANG Mingzhi^{1,2}, HU Min^{1,2}, WANG Baisong³, GAO Bing⁴, ZHAO Nengtong⁴

(1. No.710 R&D Institute, CSSC, Yichang 443003, China; 2. Qingjiang Innovation Center, Wuhan 430076, China;
3. Hangzhou Power Supply Company, State Grid Zhejiang Electric Power Company, Hangzhou 311500, China;
4. National Electric Power Conversion and Control Engineering Technology Research Center (Hunan University), Changsha 410082, China)

Abstract Membrane-type electromagnetic acoustic sources have the advantages of large volume displacement, controllable ultra-low frequency acoustic field and good adaptability, so they have broad application prospect in the field of minesweeping acoustic source. Radiation membrane is the core vibration component of an acoustic source. It is of great significance to study the vibration characteristics of radiation membrane for the design and application of electromagnetic acoustic sources. In this paper, an analytical method for the vibration characteristics of an electromagnetic acoustic source with membrane structure is studied. Firstly, the analytical model of the free vibration of the circular membrane of the electromagnetic acoustic source in vacuum is established. Secondly, the natural frequencies and modes of free vibration of the circular membrane in vacuum are obtained using

收稿日期: 2023-10-10

作者简介: 杨明智(1992-), 男, 博士, 工程师, 主要从事大功率超低频电声换能器多场建模研究。

基金项目: 国家自然科学基金项目“考虑多场效应的大功率超低频超磁致伸缩换能器电声能量高效高可靠变换方法研究”(52377010)。

the method of separation of variables. The correctness of theoretical solution is verified by comparing the calculated natural frequencies with the data in the references as well as finite element simulation. Then, the influence of different boundary conditions and the change of the radius of the circular membrane on the vibration characteristics of the membrane in vacuum is analyzed. Finally, considering the influence of viscous liquid loads and internal filling pressure, the amplitude-frequency characteristics and volume-displacement of the low frequency forced vibration of the circular membrane with different sizes in actual working conditions of the electromagnetic acoustic source are obtained. The method presented in this paper can accurately reflect the vibration characteristics and acoustic radiation capacity of the electromagnetic acoustic source under actual working conditions, and can provide an important reference for the design and structural optimization of high-power electromagnetic acoustic source.

Key words circular membrane; electromagnetic acoustic source; separation of variables; frequency characteristic

0 引言

扫雷声源作为声扫雷具的重要组成部分,一直是各国反水雷装备的重点研究对象,各国海军主要使用的扫雷声源形式包括机械振动式声源、活塞式液压声源、气枪式声源、压电或磁致伸缩换能器、空化声源及水下炸药等^[1-3]。

活塞式液压声源、超低频超磁致伸缩、压电等大功率发射换能器都具有体积大、质量重的缺点^[3-5]。电磁声源具有电磁力大、结构紧凑等优点^[6-10],且在低频较容易实现大的体积位移,实现超低频大功率发射^[11],在扫雷声源方面具有很大优势。

传统电磁声源采用辐射板结构作为辐射面,并通过压缩弹簧提供刚度^[12],且声源输出性能易受压缩弹簧一致性影响,适装性较差。为了保证电磁声源的活塞工作状态,采用橡胶材料在辐射板边界提供支撑及水密封处理^[13-14],会带来橡胶老化问题,限制了其应用可靠性。而膜结构电磁声源通过膜结构自身张力提供回复力,并不需要压缩弹簧,能够在较小的体积和重量前提下,实现大功率输出,相比于传统电磁声源具有适装性强、可靠性高的优点。

膜结构是 20 世纪 70 年代迅速发展起来的一种新型的张力结构形式。膜结构的特点在于刚度小、重量轻、受力作用后变形大,因此膜结构作为辐射面也在低频大功率电磁式换能器中得到应用。为了更好地设计电磁声源,实现声源的低频大功率辐射,研究膜结构的振动特性尤为重要。文献[15-16]采用数值方法研究了张拉膜的自振特性。文献[17]从物理实验方面测试膜的固有频率。文献[18]研究矩形膜的理论解,假设膜为简谐振动,然后采用分

离变量法求出膜的振型函数和频率。文献[19]先假设膜的振型函数,然后根据能量法求解矩形膜的固有频率。文献[20]研究了圆形膜、扇形膜自由振动的理论解,得到固有频率及模态的解析表达式。文献[21]采用有限元软件对无阻尼情况下电磁声源自由振动的固有频率以及相对应的模态振型进行仿真分析。文献[22]对电磁声源球顶型振膜进行了静力和模态仿真研究。

目前,对于膜结构的振动特性较多的是对其无损耗自振特性研究,关于复杂工作条件下的电磁声源的膜结构的振动特性的研究还较少。电磁声源工作时,由电磁力的作用激发辐射膜的振动,从而在介质中产生声波。换能器在水中工作时,会受到静水压力的作用,为了保证换能器的正常工作,需要在换能器内部填充压力补偿气体,随着深度的增加,需要改变内部的充气压力,这将会改变声源内部的气体密度,从而影响声源的谐振状态,因此研究辐射膜在实际工况下的振动特性对于膜结构电磁声源的设计具有极其重要的意义。

本文研究了复杂工作条件下电磁声源的辐射圆环膜的振动特性,建立了电磁声源圆环膜振动的解析模型,分析了电磁声源工作在水介质中所产生附加质量及流体负载对圆环膜振动的影响,进一步研究了声源内部压力补偿气体对辐射圆环膜振动特性的影响,为扫雷电磁声源的设计提供了重要的理论指导。

1 圆环膜结构电磁声源工作原理

典型的膜结构电磁声源换结构如图 1 所示,包括圆环膜、励磁对、外壳、固定板、线圈、衔等。

N 匝线圈绕制 E 形励磁堆上, 励磁堆和衔铁之间由 3 个间距为 L 的气隙分开, 每个气息所对应的励磁堆面积为 $\frac{1}{3}S_0$, 为减少涡流损耗, E 形励磁堆和 I 形动铁均由硅钢片叠制而成, 衔铁固定在圆环膜上。当给匝数为 N 的驱动线圈施加交变电流 I 时, 在气息中产生磁场 H 和磁通 $\frac{1}{3}BS_0$, 从而在励磁堆与衔铁之间产生电磁力^[23], 电磁力推动圆环膜振动, 从而向外辐射声波。电磁力的大小可由气息中的磁能求解得到, 气息中的磁能为

$$U = 1/2(BH)S_0(L + X) = \mu_0 S_0 (NI)^2 / 2(L + X) \quad (1)$$

式中: μ_0 为真空磁导率; X 为衔铁振动引起的气息长度变化量。

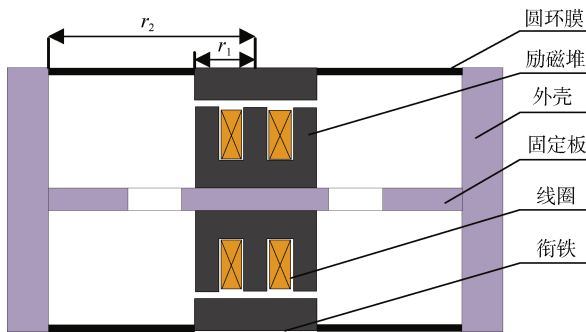


图 1 膜结构电磁声源基本结构图
Fig. 1 Basic structure of a membrane-type electromagnetic acoustic source

根据虚功原理可得电磁力为

$$F = \frac{dU}{dx} = \frac{\mu_0 S_0 (NI)^2}{2(L + X)^2} \quad (2)$$

由式 (2) 可知电磁力与线圈安匝数呈平方关系, 因此, 相比于电动式声源具有能量密度高的特点, 有利于声源的大功率输出^[24]。

2 电磁声源圆环膜在真空中的自由振动

2.1 张拉膜振动分析

膜结构电磁换能器膜振动本质上属于张拉膜问题, 张拉膜具有刚度小、形变量大的优点。在其振动的过程中, 张拉膜不能抵抗弯曲形变和剪切形变, 通过膜自身张力来平衡横向荷载。因此, 可假设薄膜为等厚度薄片, 在膜表面任意方向受到均匀的张力。取张拉膜表面一微元 $ABCD$, 在张拉膜表

面构建构成笛卡尔坐标系对膜的振动进行数学分析, CD 方向为 x 轴方向, AD 方向为 y 轴方向, z 轴为垂直张拉膜表面的方向, 如图 2 所示, 张拉膜单位长度上的张力为 T , 面密度为 ρ , z 轴方向偏离平衡位置的位移为 u 。

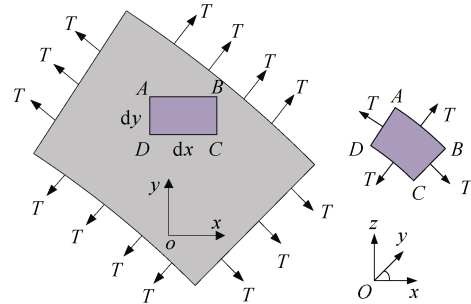


图 2 张拉膜振动
Fig. 2 Vibration of tension membrane

张拉膜微元振动前的表面积为

$$S_0 = \iint dS_0 = \iint dx dy \quad (3)$$

在外界激励作用下, 发生形变后, 张拉膜微元的表面积变为

$$S_T = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy \quad (4)$$

在振动的过程中, 张拉膜的势能为

$$U_p = T \cdot \Delta S \approx \frac{T}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy \quad (5)$$

在振动的过程中, 张拉膜的动能为

$$T_k = \frac{\rho}{2} \iint \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx dy \quad (6)$$

根据哈密顿原理可得

$$\delta \int_0^t (T_k - U_p) dt = 0 \quad (7)$$

进一步可得, 张拉膜的振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (8)$$

式中, $a = \sqrt{T/\rho}$ 为张拉膜中的波速。

2.2 电磁声源圆环张拉膜边界条件分析

电磁声振动膜与常见张拉膜结构不同, 呈圆环状, 具有内外 2 个边界, 外边界可通过机械结构连接在外壳上, 内边界连接衔铁。极坐标系下的圆环膜横向对称振动示意图如图 3 所示。

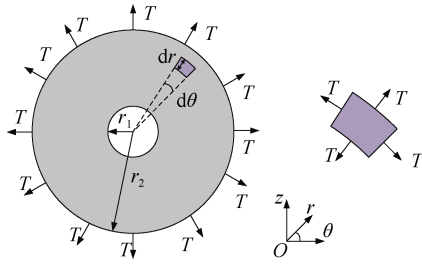


图 3 圆环膜横向对称振动

Fig. 3 Transverse symmetric vibration of a circular membrane

电磁声源的声波频谱特性与系统结构有关,且当电磁声源工作在横向对称自由振动模态时,声源的体积位移最大,发射效果最佳。因此,本文首先研究圆环膜的横向对称自由振动,考虑真空中电磁声源的圆环膜在混合边界条件下的自由振动,其振动过程中的受力分析如图 4 所示。

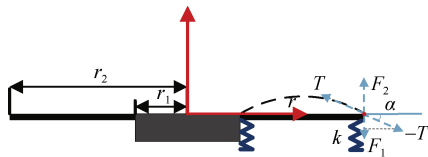


图 4 圆环膜横向对称振动过程受力分析

Fig. 4 Force analysis of a circular membrane during transverse symmetric vibration

圆环膜外边界张力的垂直分量为

$$F_1 = -T \cos \alpha = -T \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_2} \quad (9)$$

圆环膜外边界受到的等效弹簧回复力为

$$F_2 = ku \Big|_{r=r_2} \quad (10)$$

式中, k 为边界等效刚度。

由式 (9) - (10) 可以得到圆环膜振动的边界条件为

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_2} + ku \Big|_{r=r_2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (11)$$

对于真空自由振动的情况,圆环膜边界受力为 0, 可以得到其边界条件为

$$T \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_2} + ku \Big|_{r=r_2} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{cases} C_1 [\mu \sigma_{11} J_0'(\mu r_1) + \sigma_{12} J_0(\mu r_1)] + C_2 [\mu \sigma_{11} Y_0'(\mu r_1) + \sigma_{12} Y_0(\mu r_1)] = 0 \\ C_1 [\mu \sigma_{21} J_0'(\mu r_2) + \sigma_{22} J_0(\mu r_2)] + C_2 [\mu \sigma_{21} Y_0'(\mu r_2) + \sigma_{22} Y_0(\mu r_2)] = 0 \end{cases} \quad (21)$$

2.3 复杂边界条件下电磁声源圆环膜振动分析

张拉膜的预紧力不同,膜的张力及边界等效刚度不同。因此,电磁声源的圆环膜结构振动数学模型如式 (13) - (15) 所示:

$$u_{rr} = a^2 \Delta u, \quad r_1 < r < r_2 \quad (13)$$

$$\sigma_{11} u_r(r_1, t) + \sigma_{12} u(r_1, t) = 0 \quad (14)$$

$$\sigma_{21} u_r(r_2, t) + \sigma_{22} u(r_2, t) = 0, \quad t > 0 \quad (15)$$

式中: $\sigma_{ij} (|\sigma_{i1}| + |\sigma_{i2}| > 0; i=1,2)$ 为圆环膜边界条件系数,分别对应式 (10) 中的张力和等效刚度,其具体数值由圆环膜的初始预紧力决定; Δ 是极坐标系下的拉普拉斯算子。 $\sigma_{i1} = 0$ 时,电磁声源圆环膜的 $r = r_i$ 边界固定,其它参数组合是一种弹性支撑边界。本文中所有的单位均为国际单位制。

考虑圆环膜横向对称自由振动,方程 (13) 可变为如下形式:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (16)$$

采用分离变量法求解振动微分方程^[25-26],令 $u(r,t) = R(r) \cdot T(t)$ 代入方程 (16) 中可以分别得到变量分离的关于时间和空间的微分方程:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + a^2 \mu^2 T = 0 \quad (17)$$

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} + r \mu^2 R = 0 \quad (18)$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} R'(r_1) + \sigma_{12} R(r_1) = 0 \\ \sigma_{21} R'(r_2) + \sigma_{22} R(r_2) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

式中, μ 为本征值。方程 (17) 的解为 $T(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$, $\omega_n = a\mu$ 为电磁声源圆环膜横向自由振动的本征频率。

方程 (16) 为贝塞尔方程,其通解为

$$R(r) = C_1 J_0(\mu r) + C_2 Y_0(\mu r) \quad (20)$$

式中: $J_0(x)$ 和 $Y_0(x)$ 分别为 0 阶贝塞尔函数和 0 阶诺依曼函数; C_1 和 C_2 的数值由圆环膜的边界条件决定。

将式 (20) 代入边界条件式 (19) 中可以得到 2 个关于 C_1 和 C_2 的方程如式 (21) 所示:

$$D(\mu) = \begin{vmatrix} \mu\sigma_{11}J'_0(\mu r_1) + \sigma_{12}J_0(\mu r_1) & \mu\sigma_{11}Y'_0(\mu r_1) + \sigma_{12}Y_0(\mu r_1) \\ \mu\sigma_{21}J'_0(\mu r_2) + \sigma_{22}J_0(\mu r_2) & \mu\sigma_{21}Y'_0(\mu r_2) + \sigma_{22}Y_0(\mu r_2) \end{vmatrix} \quad (22)$$

方程组 (21) 为线性齐次方程组, 其有非零解的充分必要条件是系数行列式 $D(\mu) = 0$ 。

方程 (22) 的解为本征函数式 (18) 的本征值, 任何一个振动系统都有无穷多个振动模态, 因此, 其有无穷多个:

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots < \mu_m \quad (23)$$

其横向对称自由振动的固有振型为

$$R(r) = J_0(\mu r) - \frac{\mu\sigma_{11}J'_0(\mu r_1) + \sigma_{12}J_0(\mu r_1)}{\mu\sigma_{11}Y'_0(\mu r_1) + \sigma_{12}Y_0(\mu r_1)} Y_0(\mu r) \quad (24)$$

表 1 为内外边界固定的内半径 $r_1 = 0.1 \text{ m}$ 、外半径 $r_2 = 1 \text{ m}$ 的圆环膜固有频率理论解和 MATLAB

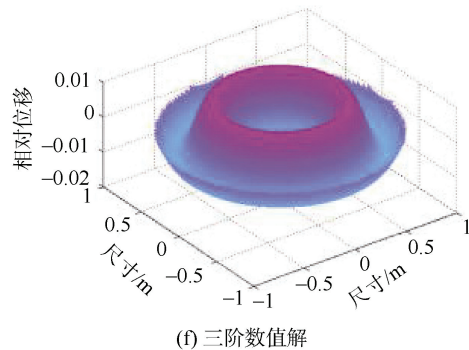
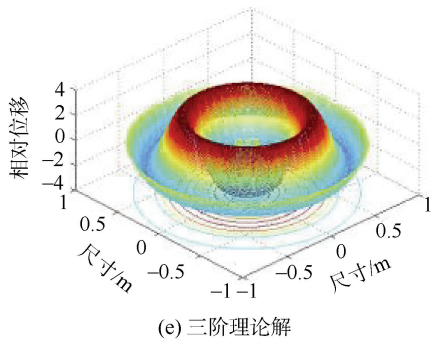
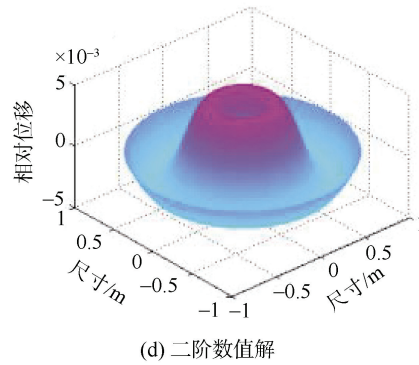
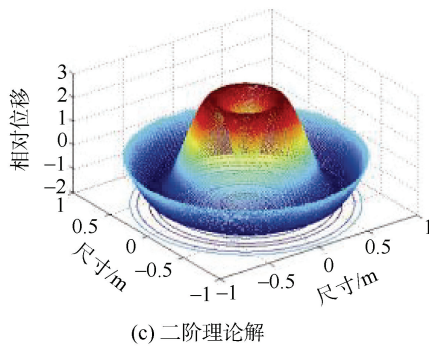
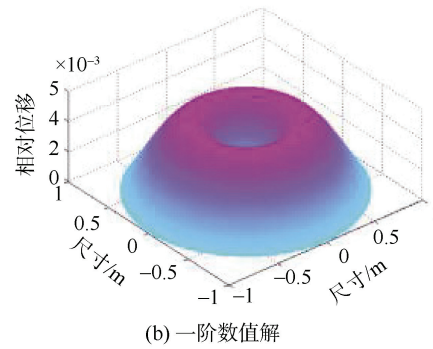
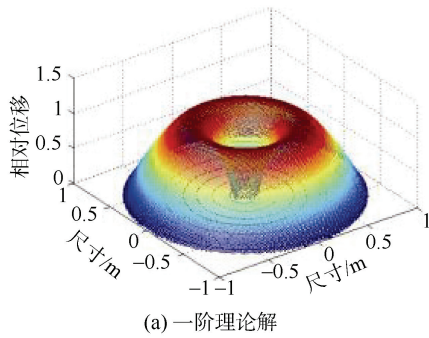
有限元数值解对比。由表可知, 电磁声源圆环膜的前 4 阶模态固有频率最大相差为 0.05 Hz, 图 5 为前 4 阶固有振型对比, 由图可知前 4 阶振型吻合良好, 以上结果验证了理论解的正确性。

表 1 圆环膜固有频率

Table 1 Natural frequency of a circular membrane

阶数	固有频率理论/Hz	固有频率数值解/Hz
1	29.02	29.00
2	60.02	60.03
3	90.83	90.88
4	121.55	121.60

注: $\sigma_{11} = 0, \sigma_{12} = 1, \sigma_{21} = 0, \sigma_{22} = 1, a = 55, r_1 = 0.1, r_2 = 1$ 。



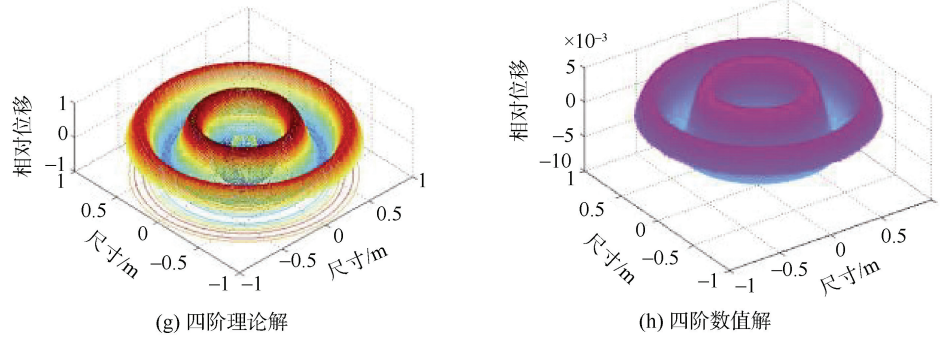


图 5 前 4 阶固有振型理论解与有限元数值解对比

Fig. 5 Comparison of theoretical solutions with numerical solutions of finite element of first 4 order natural modes

为了进一步验证本文方法的正确性, 改变圆环内半径为 $r_1 = 1.0$ m, 外半径为 $r_2 = 3.5$ m, 其他求解边界条件与文献[27]中相同, 求解得到的圆环膜自由振动固有频率与文献[27]中有限元仿真计算结果进行对比如图 6 所示。由图可知, 前 3 阶模态固有频率计算值最大误差为 0.52%, 进一步验证了本文方法的正确性。

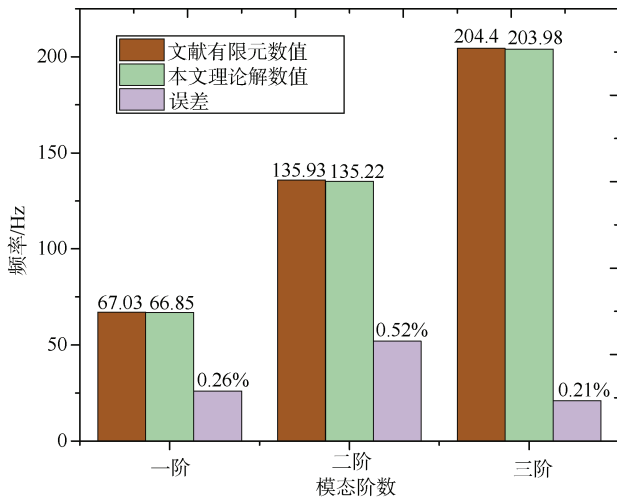
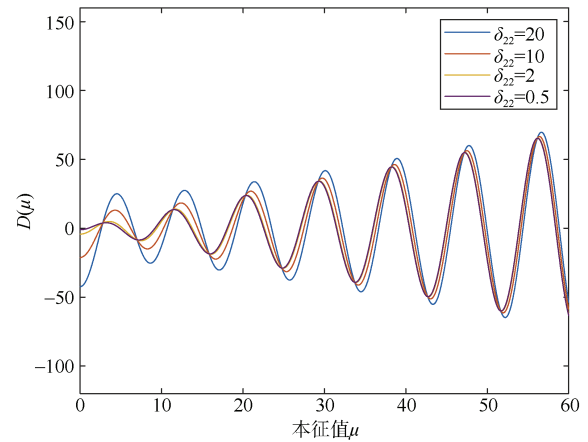


图 6 前 3 阶模态固有频率计算值与文献有限元数值解对比

Fig. 6 Comparison of calculated natural frequencies with numerical solutions of finite element of first 3 modes

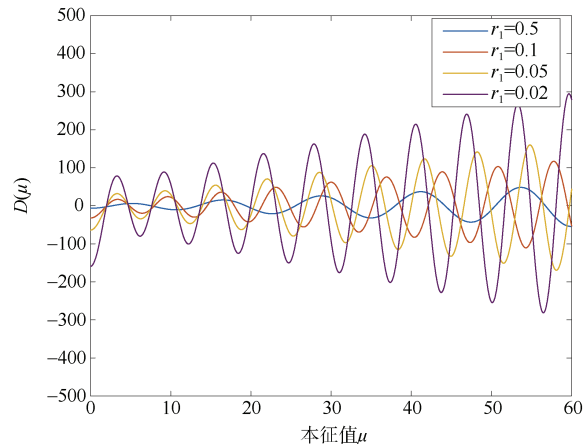
图 7 和图 8 为不同 σ_{ij} , r_1 和 r_2 条件下 $D(\mu)$ 的函数图像。由图 7 可知当 $\mu > 10$ 时, $D(\mu) = 0$ 的根与边界条件系数 σ_{22} 的取值之间关系很小, 即 σ_{22} 的取值对圆环膜振动的高阶特征频率影响很微弱。由图 8 可知低阶模态的特征值与外半径 r_1 的取值之间的关系较弱, 然而高阶模态对应特征值与外半径 r_1 的取值有很大的关系。



边界条件系数 $\sigma_{11} = 1$; $\sigma_{12} = 0$; $\sigma_{21} = 1$; $\sigma_{22} = 0.5, 2, 10, 20$ 。

图 7 $r_1 = 0.3, r_2 = 1$ 条件下 $y = D(\mu)$ 的图像

Fig. 7 Plot of function $y = D(\mu)$ under condition of $r_1 = 0.3$ and $r_2 = 1$



边界条件系数 $\sigma_{11} = 1, \sigma_{12} = 0, \sigma_{21} = 1, \sigma_{22} = 5$ 。

图 8 $r_1 = 0.5, 0.1, 0.055, 0.02; r_2 = 1$ 条件下 $y = D(\mu)$ 的图像

Fig. 8 Plot of function $y = D(\mu)$ under condition of $r_1 = 0.5, 0.1, 0.055, 0.02$ and $r_2 = 1$

图 9 为不同外半径 r_2 圆环膜 $D(\mu)$ 的函数图, 由图可知圆环膜外半径对于膜振动的低阶和高阶模态特征值均影响较大, 在设计膜结构电磁声源时, 应注意圆环膜外半径的设计。图 10 为圆环膜 $r_1 = 0.1, r_2 = 1$ 条件下, 圆环膜振动的前 4 阶本征函数值, 由图可知当圆环膜处于一阶模态振动时, 无反向振动区域, 合理利用此振动模态可以有效提升电磁声源的声辐射功率。上述结论可以为设计不同频率特性的电磁声源辐射膜结构参数选取提供重要参考。

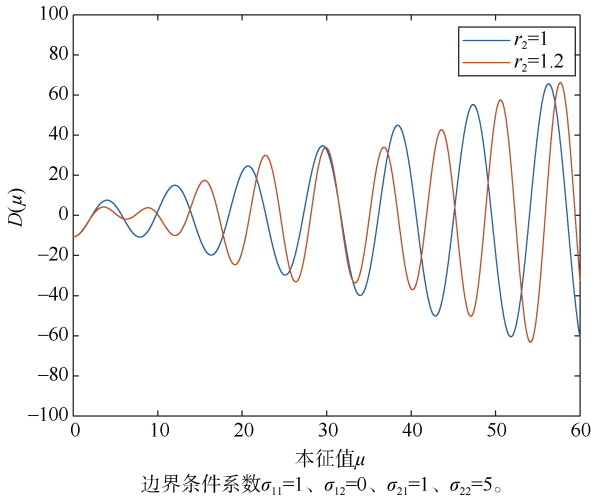


图 9 $r_1 = 0.5; r_2 = 1, 1.2$ 条件下 $y = D(\mu)$ 的图像
Fig. 9 Plot of function $y = D(\mu)$ under condition of $r_1 = 0.5$ and $r_2 = 1, 1.2$

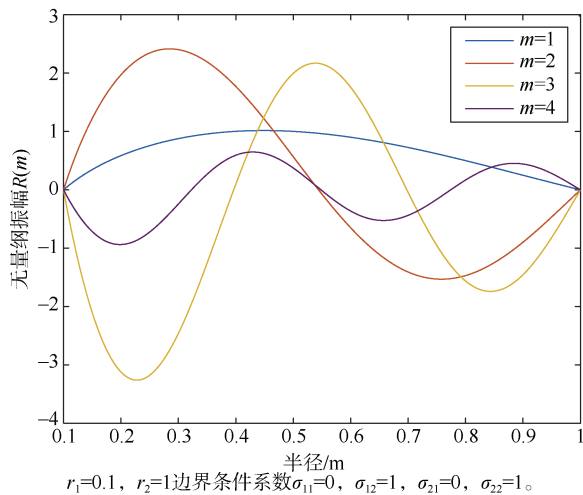


图 10 圆环膜的前 4 阶本征函数值
Fig. 10 Values of first 4 eigenfunctions of a circular membrane

3 电磁声源圆环膜在水介质中的低频强迫振动

3.1 圆环膜水介质中带阻尼低频强迫振动

当电磁声源工作在海洋环境中时, 由于海水介质为粘性介质, 电磁声源的圆环膜振动过程会受到中水介质的阻尼力作用, 其与振动速度成正比。此外, 还要考虑换能器在液体介质中伴振质量的出现, 以及声辐射过程中的能量损耗。因此, 其横向对称振动的数学模型如公式 (25) - (27) 所示:

$$\rho u_{tt} = T_m \Delta u - R_1 u_t - p_0 \quad (25)$$

$$\sigma_{11} u_r(r_1, t) + \sigma_{12} u(r_1, t) = F(t) \quad (26)$$

$$\sigma_{21} u_r(r_2, t) + \sigma_{22} u(r_2, t) = 0, \quad t > 0 \quad (27)$$

式中: $R_1 u_t$ 为电磁声源在水介质中受到的阻尼力; $p_0 = p_0(r, t)$ 为介质作用在圆环膜上的单位面积力; $F(t) = A(t) \sin(\omega_0 t)$ 为作用在圆环膜内边界上的激励。在低频条件下, 声波在水中的波长远大于圆环膜的直径:

$$\lambda_0 = 2\pi c_0 / \omega_0 \gg 2r_2 \quad (28)$$

式中: c_0 为水中声速。

介质的作用力表示为如式 (29) 所示:

$$p_0(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [r_r(r, \omega) + i\omega \rho_r(r, \omega)] \times i\omega u(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (29)$$

式中: r_r 和 ρ_r 分别为声辐射过程中的声辐射阻和单位面积的附加质量^[28], 在频率接近 ω_0 时, 忽略声阻抗随频率的变化, 公式 (29) 可表示为

$$p_0(r, t) \approx r_r(r, \omega) u_t(r, t) + \rho_r(r, \omega) u_{tt}(r, t) \quad (30)$$

可以得到圆环膜的准简谐振动的边值问题如下所示:

$$u_{tt} = a_*^2 \Delta u - v^* u_t \quad (31)$$

$$\sigma_{11} u_r(r_1, t) + \sigma_{12} u(r_1, t) = F(t) \quad (32)$$

$$\sigma_{21} u_r(r_2, t) + \sigma_{22} u(r_2, t) = 0 \quad (33)$$

式中: $a_*^2 = T_m / \rho^*$ 为横向对称振动圆环膜中等效波速; $v^* = (R_1 + r_r) / \rho^*$ 为等效阻尼系数; $\rho^* = \rho + \rho_r$ 为放置在液体介质中的膜的等效面密度。

在 $F(t) = A$ 的简谐激励的作用下, 公式 (31) 的稳态解为 $u(r, t) = \text{Im}[R(r) \exp(i\omega_0 t)]$, 代入原式

中得到如下关于复振幅 R 的边值问题:

$$\Delta R + \mu^2 R = 0 \quad (34)$$

$$\sigma_{11} R'(r_1) + \sigma_{12} R(r_1) = A \quad (35)$$

$$\sigma_{21} R'(r_2) + \sigma_{22} R(r_2) = 0 \quad (36)$$

式中, $\mu = \sqrt{(\omega_0^2 - i\nu^* \omega_0) / a_*^2}$ 。

代入圆环膜受迫振动的激励幅值, 式 (34) 的解的表达式如下:

$$R(r) = A [C_1 Z_1(r) + C_2 Z_2(r)] \quad (37)$$

式中: Z_1 和 Z_2 为方程的基础解系; C_1 和 C_2 由边界条件决定。

当电磁声源工作在超低频的条件下, 忽略 a_* 、 ρ^* 和 ν^* 随 r 的变化^[20]。因此, 可以将 μ 等效复常数进行分析, 其基础解系可以表示为 $\{J_0(\mu r) Y_0(\mu r)\}$ 。在给定边界激励频率为 ω_0 , 幅值模为 A 的条件下, 声源振动的频响函数为

$$\beta \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \right) = \int_{r_1}^{r_2} r |C_1 Z_1(r) + C_2 Z_2(r)| dr \quad (38)$$

式中, β 为无量纲数。

当电磁声源线圈受到交流正弦激励的作用, 衔铁会受到电磁力的作用做活塞振动, 膜的内边界与衔铁边缘连接, 电磁力作用于圆环膜的内边界带动电磁声源的 2 个辐射膜做同相振动, 且声源工作在超低频条件下, 声波波长远大于声源最大线度。因此, 可以将其等效为单极子声源进行分析, 其辐射声功率表达式如式 (39) 所示:

$$W = \frac{\rho \omega^4 (dV)^2}{8\pi c_0} \quad (39)$$

式中: ρ 为水介质的密度; c_0 为水介质中的声速; ω 为换能器振动角频率; dV 是体积位移变化的幅值。膜结构电磁声源振动过程中体积位移包含 2 部分: 圆环膜横向对称振动的体积位移和磁芯做活塞运动过程产生的体积位移。其表达式为

$$\begin{aligned} dV &= \iint [C_1 Z_1(r) + C_2 Z_2(r)] r dr d\theta + \\ &\pi r_1^2 \cdot [C_1 Z_1(r_1) + C_2 Z_2(r_1)] = \\ &2\pi \left\{ \delta \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \right) + \frac{1}{2} r_1^2 \cdot [C_1 Z_1(r_1) + C_2 Z_2(r_1)] \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

图 11 为不同圆环膜半径下, 圆环膜的频率特

性。由图可知其它参数固定, r_1 分别为 0.02、0.1、0.2、0.25 的情况下, 随着圆环膜内半径的增大, 电磁声源前 3 阶谐振频率逐渐增大, 图中无量纲数 β 为对圆环膜上某一沿半径方向上的线位移的积分。由此, 根据式 (40) 可知: 在外界激励的作用下, 电磁声源工作在一阶模态时, 其振动的体积位移也逐渐增大, 因此可以进行大功率声发射。

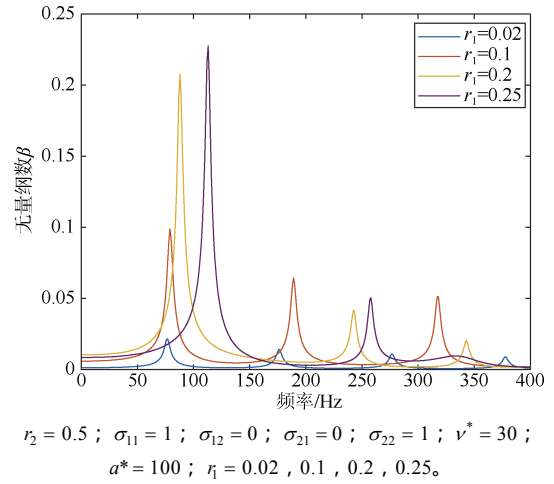


图 11 不同半径下圆环膜频率特性

Fig. 11 Frequency characteristics of a circular membrane under conditions of different radii

3.2 内部填充气体的电磁声源辐射膜在粘性介质中的低频强迫振动

当声源工作做深水条件下, 由于静水压力的作用会影响声源的输出性能, 因此需要对声源进行压力补偿措施。研究了换能器内部填充气体对电磁声源稳态强迫振动特性的影响, 在满足上文中所述的低频振动条件下, 圆环膜振动的数学模型为

$$u_{tt} = a_*^2 \Delta u - \nu^* u_t - p_g(u, u_t) \quad (41)$$

$$\sigma_{11} u_r(r_1, t) + \sigma_{12} u(r_1, t) = A \sin(\omega_0 t) \quad (42)$$

$$\sigma_{21} u_r(r_2, t) + \sigma_{22} u(r_2, t) = 0 \quad (43)$$

式中: p_g 为振动方程中考虑内部压力补偿填充气体对圆环膜振动特性的影响的表达项, 其具体表达式形式与压力补偿气体中的声速和圆环膜中声速的比值有关 ($\eta = a_g / a_*$ 的影响)。不同条件下的表达式如式 (44) 所示:

$$p_g(u, u_t) = \begin{cases} \tilde{\kappa}^2 \iint u dx dy, & \eta \gg 1 \\ \left(\rho_g / \rho^* \right) u_t(r, t), & \eta \ll 1 \end{cases} \quad (44)$$

式中： $\tilde{\kappa}^2 \equiv \rho_g a_g^2 / (\rho^* V)$ ， ρ_g 为填充气体的密度； $V = p(r_2^2 - r_1^2)h$ ， h 为换能器两辐射面之间的高度。

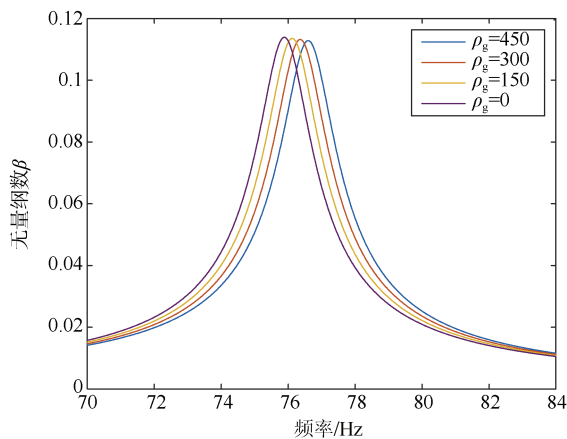
在 $\eta \ll 1$ 的情况下， $\tilde{v} = v^* + \rho_g / \rho^*$ ，则其数学表达式为

$$u_{tt} = a_g^2 \Delta u - \tilde{v} u_t \quad (45)$$

$$\sigma_{11} u_r(r_1, t) + \sigma_{12} u(r_1, t) = A \sin(\omega_0 t) \quad (46)$$

$$\sigma_{21} u_r(r_2, t) + \sigma_{22} u(r_2, t) = 0 \quad (47)$$

采用与第 2 部分类似的分离变量法对上述振动方程进行求解，得到不同填充气体密度条件下的频率特性如图 12 所示。由图可知，随着气体密度的增大，圆环膜横向自由振动的体积位移逐渐增大，圆环膜振动的频率特性会向更高的频率偏移，在电磁声源深海应用时应关注不同压力补偿气体种类的选取及其压力计算。



$r_1 = 0.01$; $r_2 = 0.5$; $\sigma_{11} = 1$; $\sigma_{12} = 0$; $\sigma_{21} = 0$; $\sigma_{22} = 1$; $v^* = 10$;
 $a^* = 100$; $a_g = 20$; $\rho^* = 50$; $\rho_g = 0, 150, 300, 450$ 。

图 12 不同填充气体密度条件下圆环膜频率特性

Fig. 12 Frequency characteristics of a circular membrane under conditions of different packed gas densities

4 结束语

电磁声源具有频谱可控、声源级高的优势，在扫雷声源的应用方面具有很大优势。针对复杂工作条件下电磁声源圆环膜的振动特性的问题，建立了电磁声源圆环膜振动的解析模型。采用分离变量法对理论模型进行求解，通过有限元仿真和与文献数据对比验证了文中推导理论解的正确性。通过理论模型分析了不同边界条件系数和圆环膜内半径的变化对其在真空中的振动特性的影响。考虑工作在

水介质中及内部填充压力补偿气体的电磁声源的低频强迫振动，分析了圆环膜振动的频率特性。主要得出了以下结论：

1) 边界条件系数 σ_{22} 的取值对于高阶固有频率影响很微弱， σ_{22} 取值分别从 0.5 增加到 20 时，圆环膜振动的五阶以上本征值数值变化小于 1。

2) 圆环膜内半径 r_1 的取值的变化对低阶模态的固有频率影响较小，而对高阶模态对应固有频率的影响很大，圆环膜外半径 r_2 的取值的变化对高低阶模态的固有频率影响都很大。

3) 当电磁声源内部填充压力补偿气体在水介质中做超低频受迫振动时，随着圆环膜内半径的增大，前 3 阶固有频率逐渐增大。内半径从 0.02 m 增加到 0.25 m 时，一阶固有频率从 77 Hz 增加到 113 Hz，并且振动体积位移也逐渐增大。随着填充气体压强的增大，气体密度增大，圆环膜振动的频率特性会向更高的频率偏移。当充气密度增加到 450 kg/m^3 时，相比于未充气状态下，频率增加约 1 Hz。因此，在设计深水工作声源时应考虑压力补偿措施引起的频率偏移。本文可为电磁声源的设计及其在扫雷声源方面的应用提供理论依据。

参考文献

- [1] 纪伟, 刘忠乐. 水下活塞式声源声辐射研究[J]. 水雷战与舰船防护, 2017, 25(1): 7-10.
- [2] 邓涛, 沈谊伟. 某型扫雷具分系统码头环境下调试措施的研究[J]. 数字海洋与水下攻防, 2022, 5(3): 230-238.
- [3] 任斌. 国外浅水反水雷的发展探究[J]. 数字海洋与水下攻防, 2021, 4(6): 525-528.
- [4] SHERMAN C H, BUTLER J L, BROWN D A. Transducers and arrays for underwater sound[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 2008, 124(3): 1385.
- [5] HOWE B M, MIKSIS-OLDS J, REHM E, et al. Observing the oceans acoustically[J]. Frontiers in Marine Science, 2019(6): 426.
- [6] TENGHAMN R. An electrical marine vibrator with a flexensional shell[J]. Exploration Geophysics, 2006, 37(4): 286-291.
- [7] 谢晋兴, 张永亮, 江敏, 等. 基于高功率电磁脉冲的深海脉冲声源仿真和实验研究[J]. 集成技术, 2021,

- 10(2): 98-108.
- [8] 杨郑. 低功耗低频电磁式水下声源关键技术研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2022.
- [9] 沐永生, 姬培锋, 蔡野锋, 等. 水下大功率电磁式脉冲声源设计与研究[J]. 声学学报, 2015, 40(2): 254-262
- [10] HOWE B M, ANDERSON S G, BAGGEROER A, et al. Instrumentation for the acoustic thermometry of ocean climate (ATOC) prototype Pacific Ocean network[C]// Oceans 1995 MTS/IEEE. San Diego: IEEE, 1995.
- [11] 卢苇, 蓝宇, 张振铎. 双活塞大功率电磁式超低频水下声源[J]. 声学技术, 2019, 38(2): 508-510.
- [12] 卢苇. 大功率甚低频水下声源研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2013.
- [13] 卢苇, 蓝宇. 电磁式大功率水下超低频声源研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2011, 32(7): 877-883.
- [14] 沐永生, 姬培锋, 蔡野锋, 等. 水下大功率电磁式脉冲声源设计与研究[J]. 声学学报, 2015, 40(2): 254-262.
- [15] 张振铎. 超低频大功率电磁式换能器研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2019.
- [16] 余志祥, 赵雷. 张拉膜结构自振特性研究[J]. 西南交通大学学报, 2004, 39(6): 734-739.
- [17] 潘钧俊, 顾明. 考虑几何非线性的方形张拉膜的等效一阶频率[J]. 振动与冲击, 2007, 26(4): 18-20.
- [18] 蔡学军, 王琳, 王卓, 等. 关于薄膜振动产生李萨如图形的研究[J]. 物理实验, 2006, 26(6): 36-38.
- [19] 吴福光, 蔡承武, 徐兆. 振动理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [20] 铁摩辛柯 S, 杨 D H, 小韦孚 W. 工程中的振动问题[M]. 胡人礼, 译. 北京: 人民铁道出版社, 1978.
- [21] 林文静, 陈树辉, 李森. 圆形薄膜自由振动的理论解[J]. 振动与冲击, 2009, 28(5): 84-86.
- [22] 焉奇龙. 电磁式大功率声波换能器关键技术研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2014.
- [23] 张高廷, 曹云东, 刘炜. 簧片式继电器固有振动特性研究[J]. 电工技术学报, 2020, 35(2): 292-299.
- [24] SHERMAN C H, BUTLER J L. Transducers and Arrays for Underwater Sound[M]. New York: Springer, 2007.
- [25] 吴胜男, 唐任远, 韩雪岩, 等. 磁致伸缩引起的非晶合金铁心振动解析计算及影响因素[J]. 电工技术学报, 2016, 31(20): 73-82.
- [26] 罗吉, 罗亮生. 圆环膜自由振动的数学模型及其若干声学特性[J]. 数学杂志, 2010, 30(1): 168-172.
- [27] 林文静, 陈树辉, 张启明. 圆环形薄膜自由振动的理论解[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(S2): 103-108.
- [28] SKUDRZYK E. The Foundations of Acoustics: Basic Mathematics and Basic Acoustics[M]. New York: Springer, 1971.

(责任编辑: 曹晓霖)