

【引用格式】李佳, 邱伟, 邹劭芬. 基于改进 LM-GN 算法的磁性目标定位方法研究[J]. 数字海洋与水下攻防, 2023, 6(5): 552-561.

基于改进 LM-GN 算法的磁性目标定位方法研究

李 佳¹, 邱 伟^{2,*}, 邹劭芬¹

(1. 湖南大学 数学学院, 湖南 长沙 410082;
2. 国防科技大学 气象海洋学院, 湖南 长沙 410073)

摘 要 利用三轴磁传感器阵列对水下磁性目标进行定位是典型的非线性最小二乘优化问题, 传统高斯-牛顿 (GN) 法和列文伯格-马夸尔特 (LM) 算法在求解该问题时具有初值敏感性问题。通过引入信赖域搜索技术, 对 LM 算法进行改进, 并基于改进的 LM 算法实现磁性目标定位, 又通过设置判断阈值来评估迭代点与最优解的距离, 提出一种结合改进 LM 算法和高斯-牛顿法特点的改进 LM-GN 算法, 既降低了算法对初始值的依赖性, 又提高了运行效率。仿真实验结果表明: 该方法可以克服现有方法中受初始值影响较大的问题, 对目标特征参数的估计更精确, 且收敛速度快, 具有一定的实际应用价值。

关键词 信赖域技术; LM 算法; 高斯-牛顿法; 磁偶极子模型; 非线性最小二乘

中图分类号 TM153 文献标识码 A 文章编号 2096-5753(2023)05-0552-10

DOI 10.19838/j.issn.2096-5753.2023.05.004

Research on Magnetic Target Localization Based on Improved LM-GN Algorithm

LI Jia¹, QIU Wei^{2,*}, ZOU Shaofen¹

(1. School of Mathematics, Hunan University, Changsha 410082, China; 2. College of Meteorology and Oceanography, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract The use of three-axis magnetic sensor array to locate underwater ferromagnetic target is a typical nonlinear least squares optimization issue. Traditional Gaussian-Newton (GN) method and Levenberg-Marquardt (LM) algorithm have an initial sensitivity problem when solving this issue. In this paper, the LM algorithm is improved by introducing the trust domain search technology, and magnetic target localization is realized based on the improved LM algorithm. And then, the distance between the iteration point and the optimal solution is evaluated by setting the threshold value. An improved LM-GN algorithm combining the characteristics of the improved LM algorithm and Gaussian-Newton method is proposed. It not only reduces the dependence of the algorithm on the initial value, but also improves the operation efficiency. The simulation results show that the proposed method can overcome the problem of the existing methods which are greatly affected by the initial value, and the estimation of the target characteristic parameters is more accurate and the convergence rate is fast, so it has certain practical application value.

Key words trust region technique; LM algorithm; Gauss-Newton method; magnetic dipole model; nonlinear least squares

0 引言

水下铁磁性目标在地磁场中会引起磁异常, 通过磁传感器阵列接收水下目标的磁异常信号并进

行处理, 可解算出目标的位置和磁矩信息^[1], 是水下目标探测的重要手段, 在军事和民用领域都具有广泛应用。

国内外学者对铁磁性目标的位置、姿态及磁性

收稿日期: 2023-06-28

作者简介: 李佳 (1997-), 女, 硕士生, 主要从事磁性目标定位研究。

*通信作者: 邱伟 (1985-), 男, 博士, 副教授, 主要从事海洋信息处理研究。

参数求解的算法研究较多。张坚等^[2]利用正交基函数 (OBF) 算法结合 BP 神经网络在船舶磁场信号检测中取得了较好的效果, 能够很好地对噪声进行过滤并突出磁异常信号的特征; 杨勇等^[3]利用 OBF 算法大幅地提高了目标磁信号的信噪比, 能够有效地检测出磁异常, 从而易于检测磁性目标; WANG 等^[4]研究了三轴磁传感器接收到的磁异常信号的特征, 提出一种正交能量比 (OER) 算法, 通过单个磁传感器实现磁矩方向估计。ALIMI 等^[5]提出了一种基于 2 阶段 LM 算法的铁磁性目标检测与跟踪算法, 适用于对 2~4 个三轴磁强计阵列附近移动的铁磁性物体的定位和磁矩估计; WANG 等^[6]针对便捷式瞬变电磁系统提出了一种利用磁梯度张量和高斯-牛顿法的地下目标快速定位的新算法。在这些方法中, 高斯-牛顿法是一种常用的磁性目标反演定位数值迭代算法, 但其只适用于小残量问题, 在低信噪比的情况下容易失效且严重依赖于初始值的选择。LM 算法是对高斯-牛顿法的改进, 在低信噪比条件下也能达到一定的精度, 但若初始值选取不当, 也会导致目标的定位精度降低甚至算法失效。针对高斯-牛顿法和 LM 算法严重依赖于初始值的问题, GE 等^[7]利用粒子群算法 (Particle Swarm Optimization, PSO) 对初始值不敏感的特性获得粗略解, 然后利用高斯-牛顿法得到更精确的解, 开发了一种基于粒子群优化和高斯-牛顿方法相结合的混合算法 (PSO-GN); 孙文^[8]利用粒子群算法的全局收敛性寻找初始值, 并将初始值代入 LM 算法进行精确求解, 提出一种基于 PSO 算法与 LM 算法的混合优化算法 (PSO-LM), 用于解决磁性目标定位问题。但粒子群算法容易陷入局部最优, 导致收敛精度低或不易收敛, 而且参数选择不当可能会增加运行时间、降低算法效率。

磁传感器接收的磁感应强度是目标的位置和磁矩的函数。由于未知参数多, 在测量中存在的噪声干扰因素导致传感器测量值与真实值有误差, 铁磁性目标的位置和磁矩事先未知, 选取的初始值也可能远离目标的真实位置, 这些因素使得传统高斯-牛顿法、LM 算法和智能优化算法都

不能得到令人满意的定位精度和效率。所以, 寻找一种对初始值敏感度较弱且能满足实时性要求的算法, 仍然是一项富有挑战性的工作。本文将铁磁性目标产生的磁异常等效为磁偶极子, 通过引入信赖域搜索技术对 LM 算法进行改进, 并基于改进 LM 算法提出了一种改进 LM-GN 算法估计目标参数。该算法克服了高斯-牛顿法和 LM 算法严重依赖于初始值的缺点, 在初始值离真实值较远的情况下, 也能实现较准确的定位效果, 降低了解对初始值的依赖性, 提高了收敛速度, 能够满足实时性需求, 具有一定的实际工程应用价值。

1 磁定位模型分析

当磁传感器与磁性目标的距离大于 3 倍以上磁性目标几何尺寸时, 可以将该磁性目标看作磁偶极子^[9], 见图 1。

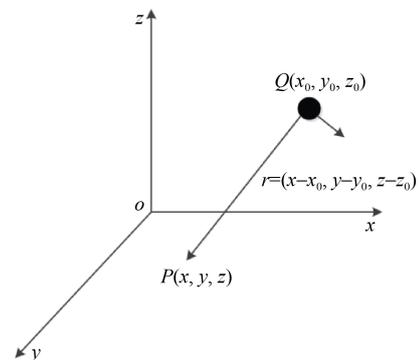


图 1 磁偶极子模型

Fig. 1 A magnetic dipole model

如图 1 所示, 设磁性目标的中心坐标为 $Q(x_0, y_0, z_0)$, 其磁矩矢量为 \mathbf{m} , 磁传感器的坐标为 $P(x, y, z)$, 磁性目标的中心点到传感器的矢径为 \mathbf{r} , 其距离为 r 。由磁偶极子模型可知, P 处磁感应强度 B 的表达式^[10]为

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}] \quad (1)$$

式中, μ_0 为真空中的磁导率, 大小为 $4\pi \times 10^{-7}$ H/m。

将式(1)在空间直角坐标系下展开得到式(2), 式中 (B_x, B_y, B_z) 和 (m_x, m_y, m_z) 分别代表了磁感应强度矢量和磁矩矢量在各坐标轴上的投影分量。

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \begin{bmatrix} 3(x-x_0)^2 - r^2 & 3(x-x_0)(y-y_0) & 3(x-x_0)(z-z_0) \\ 3(y-y_0)(x-x_0) & 3(y-y_0)^2 - r^2 & 3(y-y_0)(z-z_0) \\ 3(z-z_0)(x-x_0) & 3(z-z_0)(y-y_0) & 3(z-z_0)^2 - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

综上所述, 对于一个三轴磁传感器, 只能建立 3 个方程组, 而模型中未知数的个数为 6 个。因此, 至少需要 2 个传感器进行测量, 构成 6 个方程才能实现方程组的求解, 从而获得目标的位置和磁矩参数。假设传感器数量为 $N(N \geq 2)$, 那么式 (2) 将变为由 $3N$ 个方程构成的高度非线性、多极值的超

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \left[(B_{xm} - \bar{B}_{xm})^2 + (B_{ym} - \bar{B}_{ym})^2 + (B_{zm} - \bar{B}_{zm})^2 \right] \quad (3)$$

使得式 (3) 成立的目标位置和磁矩值, 即为需要的磁性目标参数的最优估计值。

2 非线性最小二乘问题的经典优化求解方法

迭代法是解决非线性最小二乘问题的一种有效的方法, 其主要思想是先给定所求方程的一个初始解, 然后依据迭代公式设定的步长不断对初始值进行修正, 直到满足迭代要求为止^[11]。经典的优化方法包括高斯-牛顿法、LM 算法等。

2.1 高斯-牛顿法

牛顿法迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k - (J(x_k)^T J(x_k) + S(x_k))^{-1} J(x_k)^T F(x_k) \quad (4)$$

其中

$$S(x) = \sum_{i=1}^m F_i(x) \nabla^2 F_i(x)$$

由于 $S(x)$ 中的残量函数 $F_i(x)$ 的 Hessian 矩阵 $\nabla^2 F_i(x)$ 计算量较大, 如果忽略这一项, 便得到求解非线性最小二乘问题的高斯-牛顿迭代公式:

$$x_{k+1} = x_k - (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T F(x_k) \quad (5)$$

高斯-牛顿法仅需要计算一阶导数, 以目标函数的 Jacobian 矩阵来构造 Hessian 矩阵的近似矩阵, 减少了计算量, 提高了运行效率。但是, 若在迭代过程中 $J_k^T J_k$ 不可逆, 算法将发散。另外, 由于忽略了 Hessian 矩阵的二阶偏导项, 因此当残差较大或方程组的非线性强度高时, 高斯-牛顿法会带来较大的误差。

2.2 LM 算法

高斯-牛顿法在迭代过程中要求矩阵 $J_k^T J_k$ 列

满秩, 而这一条件限制了它的应用。LM 算法^[12-13]通过求解下述优化模型来获取搜索方向:

$$d_k = \arg \min_{d \in \mathbb{R}^n} \|F(x_k) + J_k d\|^2 + \lambda_k \|d\|^2 \quad (6)$$

式中 $\lambda_k > 0$ 。由最优性条件知 d_k 满足

$$\nabla \left(\|F(x_k) + J_k d\|^2 + \lambda_k \|d\|^2 \right) = 0 \quad (7)$$

求得

$$d_k = -(J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} J_k^T F(x_k) \quad (8)$$

从而得到求解非线性最小二乘问题的 LM 算法迭代公式:

$$x_{k+1} = x_k - (J_k^T J_k + \lambda_k I)^{-1} J_k^T F(x_k) \quad (9)$$

LM 算法的关键是在迭代过程中如何调整阻尼因子 λ_k 。 λ_k 过大, 算法迭代速度变慢, 效率低; λ_k 过小, 矩阵 $J_k^T J_k + \lambda_k I$ 接近奇异, 算法稳定性差, 易发散。FAN 和 PAN 证明了选取合理的阻尼因子策略, 可使得 LM 算法在满足局部误差界条件下, 具有局部二阶收敛性, 为提高磁性目标参数估计精度奠定了理论基础^[14]。为了满足阻尼因子随迭代过程变化的要求, 本文选择 $\lambda_k = \mu \|F(x_k)\|^\sigma$, 式中 $\mu > 0$, $\sigma \in [1, 2]$ 。由于磁性目标产生的磁异常值会随着距离的三次方衰减, 当目标较远时, 磁传感器测得的磁感应强度值通常比较小, 此时 $\|F(x_k)\|$ 远小于 1, 因此, λ_k 关于 σ 是单调递减的。当 $\sigma = 1$ 时, 则 λ_k 较大, 又由式 (8), 从而产生较小的步长。为了避免过小的步长导致收敛速度慢, 本文选择 $\sigma = 2$, 使其在保证收敛的同时, 进一步提高算法的迭代效率。

2.3 改进 LM 算法

LM 算法改进了 $J_k^T J_k$ 的奇异问题, 但只具有局部收敛性。为了降低 LM 算法对初值的敏感性, 引入信赖域技术^[15], 其基本思想是在当前迭代点 x_k 的附近用一个简单函数近似目标函数 f , 并用该近似函数在 x_k 的某个领域内的极小值点作为下一个迭代点。

为了验证当前迭代步的有效性, 引入取舍指标:

$$r_k = \frac{\|F_k\|_2^2 - \|F(x_k + d_k)\|_2^2}{\|F_k\|_2^2 - \|F_k + J_k d_k\|_2^2} \quad (10)$$

式中, r_k 定义了目标函数的实际减小量与预测减小量之比, 反映了目标函数与近似函数的近似程度。

当取舍指标 r_k 大于设定的 (非负) 阈值时, 说明近似函数与目标函数的近似程度好, 接受当前迭

代步 d_k ; 否则, 不接受该迭代步。利用 r_k 来调节参数 μ_k , 若 r_k 小于设定的 (非负) 阈值, 则增大 μ_k ; 若 r_k 大于设定的 (非负) 阈值, 则减小 μ_k ; 否则, μ_k 不变。

3 改进 LM-GN 算法

改进 LM 算法由于使用了信赖域搜索技术使得它比传统高斯-牛顿法和 LM 算法的收敛范围更广^[14], 降低了算法对初始值的依赖程度, 但却减慢了收敛速度。因此, 本文基于改进 LM 算法提出了一种混合算法, 称为改进 LM-GN 算法, 该混合算法利用改进 LM 算法不严重依赖于初始值的性能和高斯-牛顿法收敛速度快的优点, 提高磁性目标参数估计的精度和效率。

算法流程图如图 2 所示。

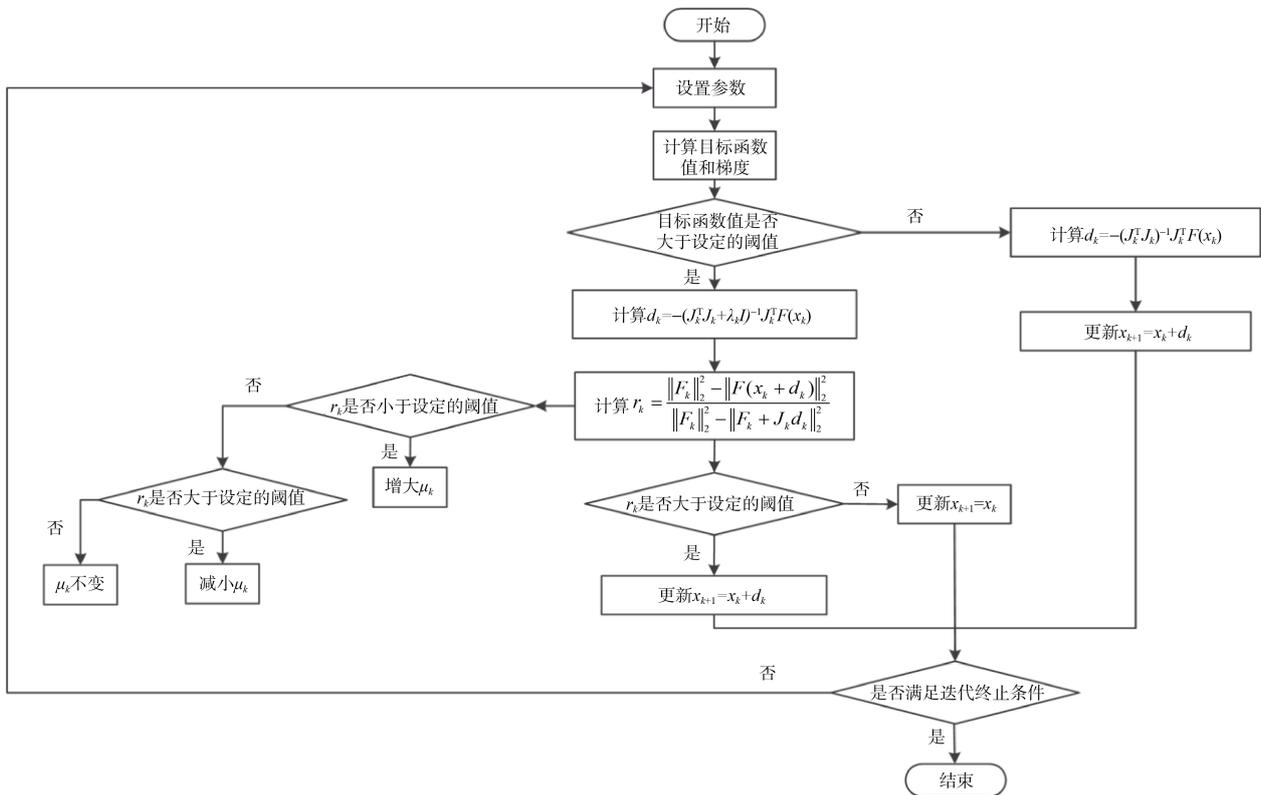


图 2 改进 LM-GN 算法流程图

Fig. 2 A flow chart of improved LM-GN algorithm

改进 LM-GN 算法通过设置一个非负阈值 κ , 当目标函数值大于这一阈值时, 说明迭代点离真值较远, 此时使用对初始值依赖程度较低的改进 LM 算法进行迭代; 当迭代到一定程度, 即目标函数值

小于或等于这一阈值时, 说明该迭代点已经在空间最优解的附近, 此时使用收敛速度较快的高斯-牛顿法继续进行迭代计算, 最终得到最佳的磁性目标定位结果。算法 3.1 (改进 LM-GN 算法) 具体步

骤如下。

Step 1 给定变量初值 x_0 ，迭代步数 $k=1$ ，常数 m ， $0 < p_0 < p_1 < p_2 < 1$ ， $c_1, c_2 > 1$ 以及收敛精度 ε 、阈值 κ ，设置 μ_0 满足 $\mu_0 > m$ ；

Step 2 计算 $g_k = \nabla f(x_k)$ ，若 $\|g_k\| \leq \varepsilon$ ，停算，输出近似解 x_k ，否则，转到 Step 3；

Step 3 计算 $f(x_k)$ ，若 $f(x_k) > \kappa$ ，则转 Step 4，否则，转 Step 8；

Step 4 令 $\lambda_k = \mu_k \|F(x_k)\|^2$ ，根据式 (8) 计算 d_k ；

Step 5 按式 (10) 计算 r_k ，并根据 r_k 选择是否接受 d_k ：

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + d_k & r_k > p_0 \\ x_k & \text{otherwise} \end{cases}$$

Step 6 调整参数 μ_k ：

$$\mu_{k+1} = \begin{cases} c_1 \mu_k & r_k < p_1 \\ \mu_k & p_1 < r_k < p_2 \\ \max\left\{\frac{\mu_k}{c_2}, m\right\} & r_k > p_2 \end{cases}$$

Step 7 令 $k = k + 1$ ，转到 Step 2；

Step 8 根据 $d_k = -(J_k^T J_k)^{-1} g_k$ 计算 d_k ；

Step 9 令 $x_{k+1} = x_k + d_k$ ， $k = k + 1$ ，转 Step 2。

式中： p_0 为迭代步取舍指标； p_1 为增大阻尼因子时 r_k 取值的上限阈值； p_2 为减小阻尼因子时 r_k 取值的下限阈值。为了防止序列接近解时步长过大，令 m 为参数 μ_k 的下限阈值。

4 仿真实验分析

本节通过仿真实验比较改进 LM-GN 算法、改进 LM 算法、LM 算法和高斯-牛顿法的磁性目标参数估计性能。实验中磁传感器测量阵列和目标的空间分布如图 3 所示。

假设磁性目标的实际参数为 $(x_0, y_0, z_0, m_{x_0}, m_{y_0}, m_{z_0})$ ，通过优化算法估计得到的结果为 (x, y, z, m_x, m_y, m_z) ，定义定位误差为

$$E_p = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (11)$$

定义磁矩误差为

$$E_m = \sqrt{(m_x - m_{x_0})^2 + (m_y - m_{y_0})^2 + (m_z - m_{z_0})^2} \quad (12)$$

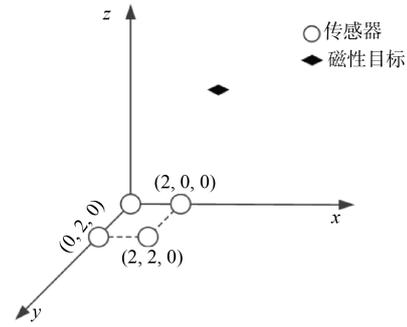


图 3 磁传感器阵列与目标空间分布示意图

Fig. 3 Magnetic sensor array and schematic diagram of spatial distribution of a target

算法参数设置如下：收敛精度阈值 $\varepsilon = 10^{-21}$ ，LM 算法中的阻尼因子更新方式为 $\lambda_k = \mu \|F(x_k)\|^2$ ，其中 $\mu = 10^{-4}$ ，改进 LM 算法中的 $c_1 = c_2 = 5$ ， $p_0 = 0.25$ ， $p_1 = 0.5$ ， $p_2 = 0.75$ ， $m = 10^{-6}$ ， $\mu_0 = 10^{-4}$ ，判断阈值 κ 为 10^{-15} 。

目标参数的真值设为 $[10 \ 10 \ 10 \ 800 \ 700 \ 800]^T$ ，在无噪声、标准差分别为 0.01 nT 和 0.1 nT 的 0 均值高斯白噪声的情况下，为了分析高斯-牛顿法和 LM 算法对初始值的依赖程度，根据参数初值离真值的距离选取 3 组不同的参数初值分别为 $[8 \ 8 \ 8 \ 500 \ 500 \ 500]^T$ 、 $[1 \ 1 \ 1 \ 500 \ 500 \ 500]^T$ 和 $[0 \ 0 \ 1 \ 800 \ 700 \ 800]^T$ 进行仿真实验。高斯-牛顿法、LM 算法、改进 LM 算法和改进 LM-GN 算法的参数估计结果分别如表 1、表 2 和表 3 所示。

由表 1、表 2 和表 3 结果可以看出，在同一迭代初始值条件下，随着噪声标准差的不断增大，4 种算法的目标参数估计结果与真值的差值逐渐增大，表明噪声对磁性目标定位有较大的影响。另外，与 LM 算法相比，高斯-牛顿法更容易受到噪声的干扰，这是由于随着噪声标准差的不断增大，该优化问题由小残差问题转变为大残差问题，此时 Hessian 矩阵中的 $S(x)$ 的作用不容忽视，高斯-牛顿迭代步中舍去这一项将导致该算法发散，而 LM 算法中通过 $\lambda_k I$ 修正了 Hessian 矩阵的近似项，在保证算法收敛性的同时也避免了 $J_k^T J_k$ 接近奇异时，搜索方向的模 $\|d_k\|$ 过大的问题。在同一噪声标准差不同迭代初值条件下，这 4 种方法所得解的正

表 1 无噪声条件下初始值选取对 4 种算法计算结果的影响

Table 1 Influence of initial value selection on results of 4 algorithms without noise

算法类型	初始值	参数估计
高斯-牛顿法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	迭代失败
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	迭代失败
LM 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	迭代失败
改进 LM 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
改进 LM-GN 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	$[10\ 10\ 10\ 800\ 700\ 800]^T$

表 2 标准差为 0.01 nT 的 0 均值高斯白噪声条件下初始值选取对 4 种算法计算结果的影响

Table 2 Influence of initial value selection on results of 4 algorithms under condition of zero-mean Gaussian white noise with a standard deviation of 0.01 nT

算法类型	初始值	参数估计
高斯-牛顿法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 798\ 705\ 797]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	迭代失败
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	迭代失败
LM 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 799\ 699\ 801]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 798\ 703\ 799]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	迭代失败
改进 LM 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 805\ 698\ 796]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 798\ 702\ 803]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	$[10\ 10\ 10\ 797\ 702\ 800]^T$
改进 LM-GN 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 802\ 698\ 802]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 803\ 701\ 797]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	$[10\ 10\ 10\ 802\ 697\ 800]^T$

确性依赖于选取的迭代初值与真值的靠近程度, 初值越靠近真实值, 算法的估计结果越准确。对于高斯-牛顿法和 LM 算法, 若其中存在几个参数远离真实值, 则不能保证其迭代的收敛性和解的正确性, 由表 1 可知即使在无噪声的情况下这 2 种算法也会迭代失败, 可见高斯-牛顿法和 LM 算法的计

算结果严重依赖于初始值的选取。另外, 高斯-牛顿法对初始值的依赖程度强于 LM 算法, 这是因为方程组的非线性程度越高, $S(x)$ 的值越大, 而高斯-牛顿法的迭代公式舍去 $S(x)$, 导致矩阵接近奇异, 在远离真实值的初始值开始得到的搜索方向不是最有效的下降方向, 进而陷入初始值附近的局部最优解, 导致迭代失败。在相同的噪声标准差条件下, 只有在选取的初始值每个参数都接近真实值的情况下, 这 2 种算法才会收敛到全局最优解。然而在磁性目标定位问题中, 目标的位置和磁矩真值事先未知, 所以初始值的选取具有随机性, 并不能保证选取的初始值靠近真实值。而改进 LM 算法和改进 LM-GN 算法在上述不同的初始值的情况下都能迭代成功, 说明引入信赖域技术之后, 算法在一定程度上降低了解对初始值的依赖程度。

表 3 标准差为 0.1 nT 的 0 均值高斯白噪声条件下初始值选取对 4 种算法计算结果的影响

Table 3 Influence of initial value selection on results of 4 algorithms under condition of zero-mean Gaussian white noise with a standard deviation of 0.1 nT

算法类型	初始值	参数估计
高斯-牛顿法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 818\ 693\ 768]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	迭代失败
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	迭代失败
LM 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 797\ 682\ 778]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 814\ 678\ 804]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	迭代失败
改进 LM 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 779\ 693\ 809]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 828\ 752\ 776]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	$[10\ 10\ 10\ 754\ 718\ 826]^T$
改进 LM-GN 算法	$[8\ 8\ 8\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 809\ 707\ 786]^T$
	$[1\ 1\ 1\ 500\ 500\ 500]^T$	$[10\ 10\ 10\ 793\ 679\ 826]^T$
	$[0\ 0\ 1\ 800\ 700\ 800]^T$	$[10\ 10\ 10\ 795\ 716\ 793]^T$

下面仍考虑无噪声、标准差分别为 0.01 nT 和 0.1 nT 的 0 均值高斯白噪声的情况, 为评估不同算法对初始值的依赖程度, 在解空间内随机给定初始值的情况下, 分别进行 1 000 次的 Monte Carlo 实验, 并将定位误差是否超过 1 m 作为定位失败或成功的评判指标。得到 4 种算法的定位正确率如表 4 所示。本文选取解空间为 $x \in [0, 20]$, $y \in [0, 20]$,

$z \in [0, 20]$, $m_x \in [0, 1000]$, $m_y \in [0, 1000]$, $m_z \in [0, 1000]$ 。

表 4 不同算法的定位正确率

Table 4 Localization accuracy of different algorithms

算法类型	噪声标准差/nT	定位正确率/%
高斯-牛顿法	0	25.4
	0.01	23.5
	0.1	23.2
LM 算法	0	63.1
	0.01	62.0
	0.1	60.8
改进 LM 算法	0	99.7
	0.01	99.7
	0.1	99.7
改进 LM-GN 算法	0	99.8
	0.01	99.7
	0.1	99.7

由表 4 结果可以看出: 在随机给定初始值的情况下, 高斯-牛顿法和 LM 算法的定位正确率都很低, 特别是高斯-牛顿法, 即使在无噪声的情况下, 定位正确率仅有 25.4%, LM 算法也只达到了 63.1%,

说明这 2 种算法严重依赖于初始值的选取。而改进 LM-GN 算法和改进 LM 算法的定位正确率相当, 且高于高斯-牛顿法和 LM 算法。即使在噪声较大时, 定位正确率也几乎能达到 100%。这说明引入信赖域搜索技术使得算法具有全局收敛性, 降低了算法对初始值的依赖程度。随着噪声的不断增大, 4 种算法的定位正确率都在逐渐减小, 这是因为求解非线性最小二乘问题时代入的 $B_{x1}, B_{y1}, B_{z1}, \dots, B_{xN}, B_{yN}, B_{zN}$ 是带有噪声的实际测量的磁感应强度三分量值, 因此求解式 (3) 所得结果仍不可避免地要受到噪声的影响。

设目标参数的真值仍为 $[10 \ 10 \ 10 \ 800 \ 700 \ 800]^T$, 算法参数选取同上, 由于高斯-牛顿法与 LM 算法对初始值敏感, 为了能够比较这 4 种算法的收敛速度, 需要一个合理的初始值, 不妨假设初始值选为 $[3 \ 3 \ 3 \ 200 \ 200 \ 200]^T$, 在噪声标准差为 0.1 nT 的条件下, 高斯-牛顿法、LM 算法、改进 LM 算法和改进 LM-GN 算法同时运行一次得到的各参数值的迭代情况如图 4 所示, 得到目标函数值达到同样终止条件所需迭代次数如表 5 所示。

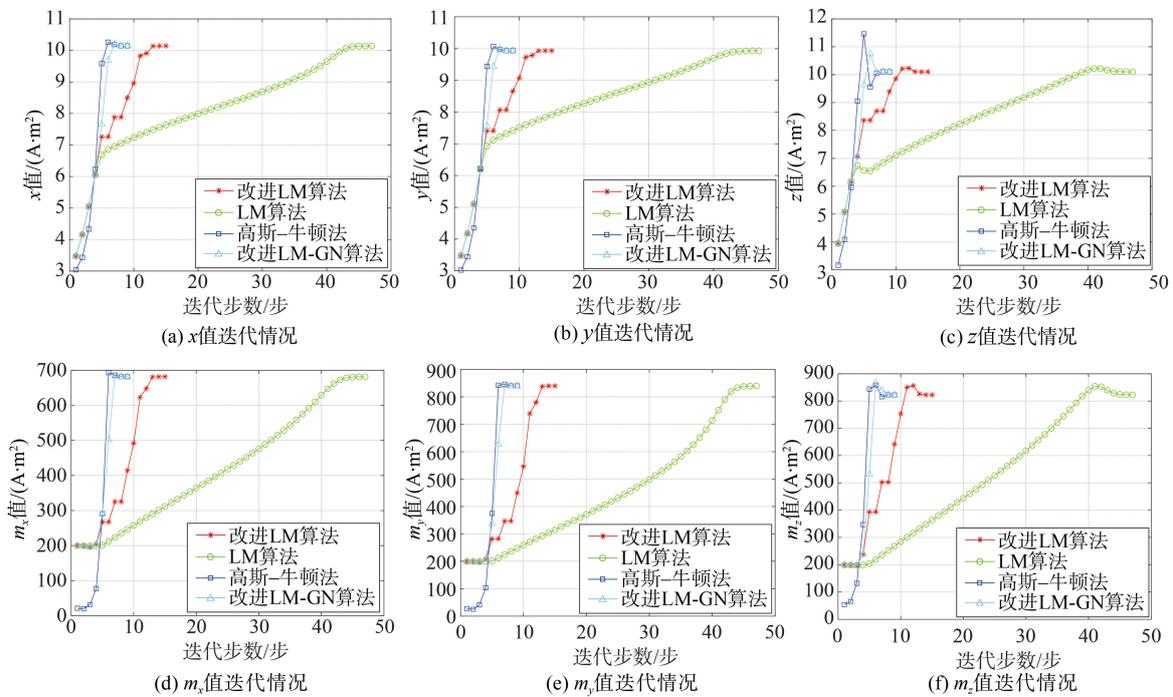


图 4 标准差为 0.1nT 的 0 均值高斯白噪声条件下各参数迭代情况

Fig. 4 Iteration of each parameter under condition of zero-mean Gaussian white noise with a standard deviation of 0.1 nT

表 5 标准差为 0.1 nT 的 0 均值高斯白噪声条件下达到相同终止条件不同算法的迭代步数

Table 5 Number of iteration steps of different algorithms that reach the same termination condition under condition of zero-mean Gaussian white noise with a standard deviation of 0.1 nT

算法类型	迭代步数/步
高斯-牛顿法	10
LM 算法	48
改进 LM 算法	16
改进 LM-GN 算法	10

由图 4 可知,改进 LM-GN 算法在迭代初期与改进 LM 算法迭代相似,但在迭代一定步数之后与改进 LM 算法有明显的不同,改进 LM-GN 算法各参数收敛到目标值的速度更快,运行时达到相同的终止条件所需要的迭代步数明显更少。这是因为改进 LM-GN 算法中设置的判断阈值起了作用,在目标函数值较大时,即迭代点离真值较远,使用的是改进 LM 算法,在一定程度上减弱了解对初始值的依赖性,直至目标函数值达到判断阈值,此时迭代点在收敛解的附近,使用高斯-牛顿法加快了算法的收敛速度。改进 LM 算法和 LM 算法迭代步中求逆部分增加了 $\lambda_k I$ 项,使得计算得到的步长更小,因此,在避免矩阵奇异的同时却降低了收敛速度。综上所述,由改进 LM-GN 算法得到的搜索方向更接近于目标下降的方向,迭代步数更少,收敛速度更快。

如表 5 所示,在噪声为 0.1 nT 时,改进 LM-GN 算法和高斯-牛顿法只需要 10 步,而改进 LM 算法需 16 步,LM 算法需要 48 步才能达到相同精度。综上所述,改进 LM-GN 算法在一定程度上比改进 LM 算法具有更快的收敛速度,达到相同的终止条件所需的迭代步数更少,算法降低解对初始值依赖程度的同时,又加快了收敛速度。

接下来,仿真实验仍在上述参数设置下,在无噪声条件下,这 4 种算法迭代得到的解与真值相同。考虑不同噪声标准差条件下 4 种算法达到充分迭代的终止条件下运行 100 次,定位误差和磁矩误差计算结果如表 6 和表 7 所示,运行 1 次所需时间如表 8 所示。

表 6 标准差为 0.01 nT 的 0 均值高斯白噪声条件下定位误差和磁矩误差

Table 6 Positioning error and magnetic moment error under condition of zero-mean Gaussian white noise with a standard deviation of 0.01 nT

算法类型	E_p/m	$E_m/(A \cdot m^2)$
高斯-牛顿法	0.017 0	4.268 3
LM 算法	0.015 9	3.982 9
改进 LM 算法	0.019 9	4.951 8
改进 LM-GN 算法	0.016 9	4.225 8

表 7 标准差为 0.1 nT 的 0 均值高斯白噪声条件下定位误差和磁矩误差

Table 7 Positioning error and magnetic moment error under condition of zero-mean Gaussian white noise with a standard deviation of 0.1 nT

算法类型	E_p/m	$E_m/(A \cdot m^2)$
高斯-牛顿法	0.183 5	46.000 8
LM 算法	0.177 6	44.613 6
改进 LM 算法	0.171 5	43.218 7
改进 LM-GN 算法	0.163 6	40.872 1

表 8 不同噪声标准差条件下 4 种算法运行 1 次所需时间

Table 8 Running time of 4 algorithms under different noise standard deviation conditions

算法类型	噪声标准差/nT	时间/s
高斯-牛顿法	0	0.005 2
	0.01	0.005 4
	0.1	0.005 3
LM 算法	0	0.007 2
	0.01	0.008 8
	0.1	0.008 4
改进 LM 算法	0	0.141 5
	0.01	0.154 3
	0.1	0.151 2
改进 LM-GN 算法	0	0.006 8
	0.01	0.007 9
	0.1	0.007 9

由表 6 和表 7 可知,在初始值选取合适的情况下,4 种算法的迭代解达到了相似的精度,说明这 4 种优化算法在良好初始值的条件下都能够解决磁性目标的定位问题。随着噪声标准差的不断增大,算法得到的解精度逐渐降低,可见噪声对磁性目标参数估计结果影响较大。

在初始值选取合适的情况下,由表 8 可知,高斯-牛顿法收敛速度最快,改进 LM 算法和 LM 算法由于步长的减小导致收敛速度变慢,由图 4 可知改进 LM 算法比 LM 算法迭代步数少,但表 8 却显示其收敛速度慢于 LM 算法,这是因为改进 LM 算法中需要计算 r_k 和更新 μ_k ,从而导致计算时间比 LM 算法多了约 0.14%。改进 LM-GN 算法所需时间多于高斯-牛顿法,但相对于 LM 算法和改进 LM 算法,其收敛速度明显加快,表明改进 LM-GN 算法在降低解对初始值依赖程度的同时也具有较

快的收敛速度。

为了分析改进 LM-GN 算法对运动目标的定位性能,假设目标 z 轴坐标不变,设为 10 m,磁矩分量不变,设为 (800,700,800),目标由初始位置 (-8,-8) 分别在 x 、 y 方向上均以 1 m/s 的速度做匀速直线运动,直到终点位置 (15,15) 处停止。考虑标准差为 0.1nT 的 0 均值高斯白噪声,在解空间内随机生成初始值的情况下,进行 1 000 次 Monte-Carlo 实验,计算磁性目标运动到每个点处的定位正确率,结果如图 5 所示。

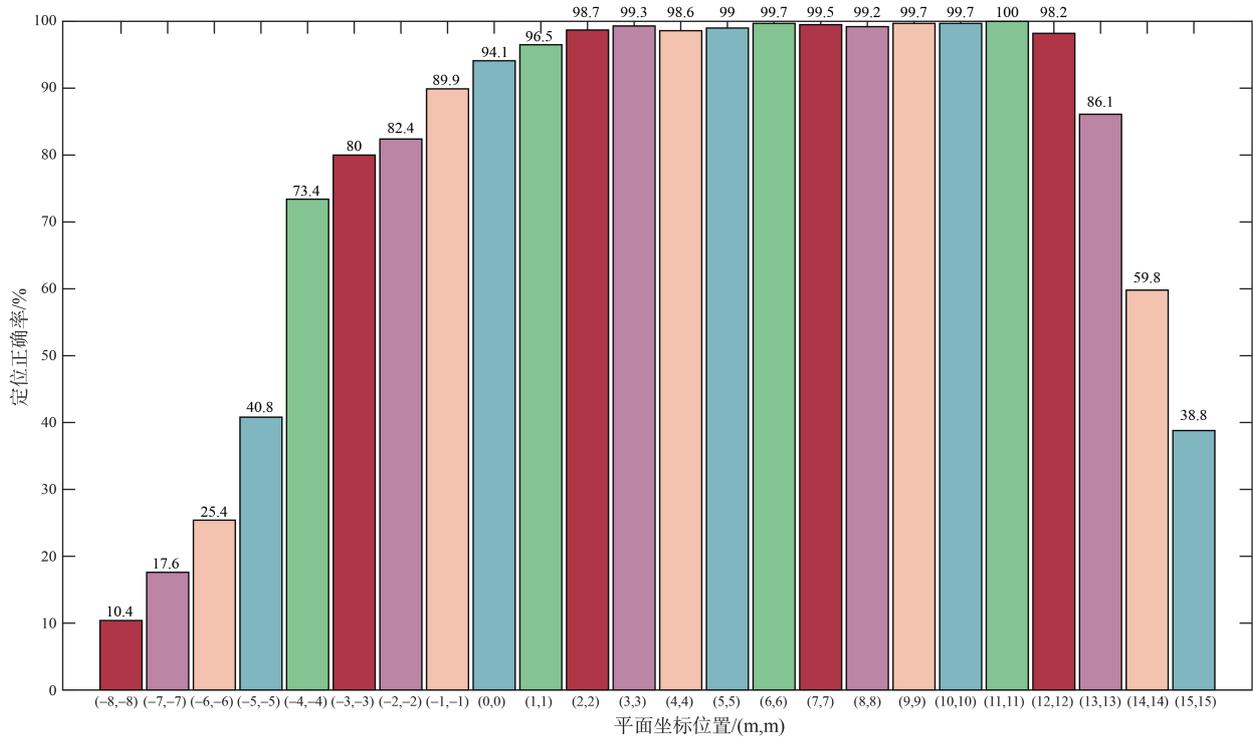


图 5 磁性目标运动到每个点处的定位正确率

Fig. 5 Positioning accuracy rate of a magnetic target moving to each point

由图 5 可知,改进 LM-GN 算法在 $x, y \in [-3, 13]$ 的空间范围内都能达到较高的正确率,说明该算法降低了解对初始值的依赖程度,而在其他空间范围内的迭代成功率不够高,主要是由目标距离磁传感器较远使得信噪比降低导致的。

为了全面评价所提算法的定位性能,进一步将其与 PSO-LM^[8]算法和 PSO-GN^[7]算法进行性能比较,其中 PSO 算法的种群规模设置为 30,迭代次数设置为 10。目标参数的真值仍为 $[10 \ 10 \ 10 \ 800 \ 700 \ 800]^T$,表 9 为在噪声标准差为 0.1nT 的条件

下,3 种算法在定位误差、磁矩误差和运行时间方面的比较结果。

表 9 改进 LM-GN 与 PSO-LM 算法的比较

Table 9 Comparison between improved LM-GN and PSO-LM algorithms

算法类型	E_p/m	$E_m/(A \cdot m^2)$	时间/s
PSO-LM ^[8]	0.172 3	41.467 8	0.211 4
PSO-GN ^[7]	0.171 6	41.275 6	0.014 9
改进 LM-GN	0.171 6	41.280 0	0.009 0

从表 9 可以看出,改进 LM-GN 算法在定位误差

和磁矩误差方面能达到与 PSO-LM 算法和 PSO-GN 算法相似的精度,但在运行时间上明显少于这 2 种算法,表明了本文方法在运行效率方面的优势。

5 结束语

本文基于运用信赖域技术修正的 LM 算法提出了一种改进 LM-GN 算法解决磁性目标定位问题。针对高斯-牛顿法和 LM 算法在求解非线性最小二乘问题时严重依赖初始值的缺点,通过引入信赖域搜索技术,得到了改进 LM 算法,并根据改进 LM 算法收敛速度下降这一不足,将改进 LM 算法与高斯-牛顿法结合,提出了一种改进 LM-GN 算法。仿真结果表明:在初始值随机选取的情况下,若初始值接近真实值,则高斯-牛顿法和 LM 算法都能够收敛到全局最优解;但若选取的初始值远离真实值,则 2 种方法均迭代失败。而本文提出的改进 LM-GN 算法不仅克服了传统方法严重依赖初始值的缺点,在一定的解空间中能够有效地估计出目标的位置和磁矩,降低了对初始值的依赖程度,且计算速度快,迭代步数少,能够满足实时性需求。下一步工作将开展外场试验,并用实测数据验证本文方法的有效性。

参考文献

- [1] 向前,马小龙. 基于磁偶极子模型的水下目标定位与跟踪[J]. 探测与控制学报, 2019, 41(3): 72-75.
- [2] 张坚,林春生,黄凡. OBF 分解与 BP 网络在船舶磁场信号检测中的应用[J]. 船电技术, 2011, 31(7): 13-16.
- [3] 杨勇,陈正想. 基于正交基分解算法的航空磁探方法[J]. 电子科技, 2014, 27(7): 36-39.
- [4] WANG J Z, SHEN Y, GAO J Q, et al. Magnetic moment direction estimation based on magnetic anomaly signature analysis[C]// 2020 IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC). Dubrovnik: IEEE, 2020.
- [5] ALIMIR R, GERON N, WEISS E, et al. Ferromagnetic mass localization in check point configuration using a Levenberg Marquardt algorithm[J]. Sensors, 2009, 9(11), 8852-8862.
- [6] WANG L J, ZHANG S, CHEN S D, et al. Fast localization of underground targets by magnetic gradient tensor and Gaussian-Newton algorithm with a portable transient electromagnetic system[J]. IEEE Access, 2021, 9: 148469-148478.
- [7] GE J, WANG S Q, DONG H B, et al. Real-time detection of moving magnetic target using distributed scalar sensor based on hybrid algorithm of particle swarm optimization and Gauss-Newton method[J]. IEEE Sensors Journal, 2020, 20(18): 10717-10723.
- [8] 孙文. 基于 PSO-LM 混合算法的磁性目标定位研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2018.
- [9] 肖昌汉,高俊吉. 磁性物体磁偶极子模型适用性的实验研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2010, 18(5): 862-868.
- [10] SHEN Y, MCLAUGHLIN K L, GAO J, et al. AC magnetic dipole localization by a magnetoelectric sensor[J]. Smart Materials and Structures, 2012, 21(6): 065007.
- [11] 闫慧. 解非线性方程的迭代算法研究[D]. 合肥: 合肥工业大学, 2014.
- [12] LEVENBERG K. A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares[J]. Quart of Applied Mathematics, 1944, 2(2): 164-168.
- [13] MARQUARDT D W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear inequalities[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, 11(2): 431-441.
- [14] FAN J Y, PAN J Y. A note on the Levenberg-Marquardt parameter[J]. Applied Mathematics and Computation, 2009, 207(2): 351-359.
- [15] ZHANG Y, JI Q M, ZHOU Q H. A new nonmonotone adaptive trust region method[J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2021, 9(12): 3102-3114.

(责任编辑: 曹晓霖)