

# Lamb 波在水下弹性板散射声场仿真实验

赵秀凤, 崔海超, 董 瑞

(中国人民解放军 91315 部队, 辽宁 大连 116041)

**摘 要** 利用有限元声场计算软件 COMSOL, 仿真实验了 Lamb 波在水下弹性板直角板端反射并发生模式转换时的散射声场, 通过对散射声场的分析, 结合能量守恒定律, 忽略杂散波(如棱角波)近似计算了 Lamb 波在水下弹性板直角板端的模式转换效率, 并且与理论值进行了比较。

**关键词** Lamb 波; COMSOL 仿真; 模式转换效率

**中图分类号** TB567      **文献标识码** A

## Simulation Experiments of Lamb Wave's Scattering Sound Field on Underwater Elastic Plate

ZHAO Xiufeng, CUI Haichao, DONG Rui

(No. 91315 Unit of PLA, Dalian 116041, China)

**Abstract** Using the finite element sound field computing software COMSOL, the simulation experiments are conducted on the scattering sound field when Lamb wave is reflected and conducts modal conversion at the right angle plate end of the underwater elastic plate. Through the analysis of the scattering sound field and in combination with the law of energy conservation, the modal conversion efficiency of Lamb wave at the right angle plate end of the underwater elastic plate is calculated by ignoring the clutter wave (such as angular wave), and compared with the theoretical value.

**Key words** Lamb wave; COMSOL simulation; modal conversion efficiency

## 0 引言

海洋的经济和军事意义非常重要, 军事上, 控制海洋是打赢现代高技术战争的重要因素之一, 水下信息则是反潜战和潜艇战致胜的重要条件之一。目前声波还是唯一能在海洋中远距离传输的能量形式, 声呐是利用声波来测量水下目标各种参数的设备。水下目标通常为弹性壳体, 入射声波激励产生的散射波中会有弹性散射波, 也即弹性壳体中弹性波的漏波。弹性平板中的弹性波以各阶不同振动模式的 Lamb 波传播, 而 Lamb 波在板端反射会出现模

态转换。因此研究 Lamb 波在板端的模式转换效率是分析水下弹性板的散射声场空间分布的基础, 对分置声呐目标识别和探测的研究具有重大的意义<sup>[1-2]</sup>。

## 1 Lamb 波在水下弹性板散射原理

在水中, 某模式 Lamb 波的临界角为  $\theta_c$ , 当声波以  $\theta_c$  入射到弹性板表面时, 会激励出 Lamb 波在弹性板中前向传播, 传播至直角板端  $E$  处反射, 并且发生模式转换<sup>[2]</sup>。同时, Lamb 波在传播过程中, 不断向水中辐射声波, 一般称之为 Lamb 波的漏波。如图 1 所示。

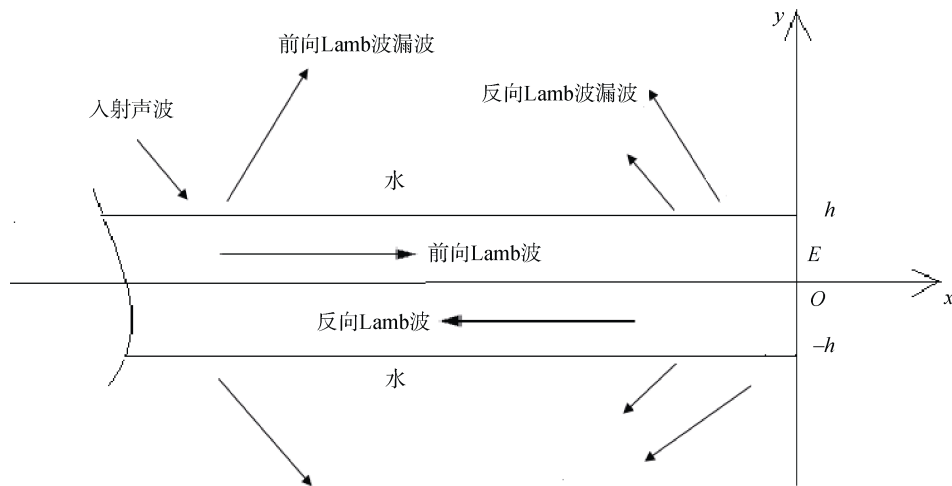


图 1 声波传播示意图

Fig. 1 Schematic diagram of propagation of sonic wave

某模态 Lamb 波的漏波传播方向，由该模态 Lamb 波的临界角确定，可由公式 (1) 求得：

$$\theta_c = \arcsin \frac{c_w}{c_p} \quad (1)$$

式中： $\theta_c$  表示某模态 Lamb 波的临界角； $c_w$  表示水中声速； $c_p$  表示该模态 Lamb 波的相速度。

计算水下弹性板中的 Lamb 波在直角板端反射后的模态转换效率时，需考虑水下弹性板中 Lamb 波的衰减系数对其的影响。由于弹性板不吸收声能量，所以当声波在弹性板中传播时，能量会不断地衰减，根据能量守恒定律，弹性板中 Lamb 波衰减的能量等于其泄漏到水中的能量。

### 2 弹性板散射声场仿真实验概述

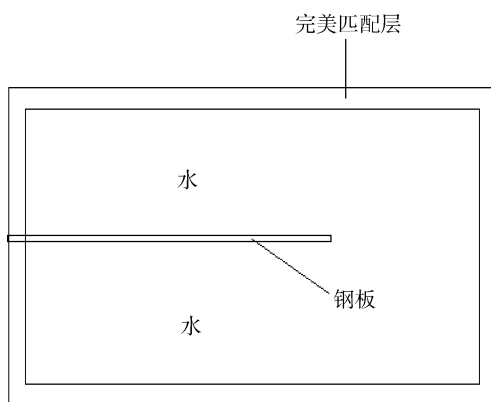


图 2 模型示意图

Fig. 2 Schematic diagram of model

本文利用 COMSOL 软件<sup>[3]</sup>，建立了水下弹性板的散射波仿真物理场模型<sup>[4]</sup>，如图 2 所示：中间部分是钢板，长 200 mm，厚 2.6 mm；钢板四周是水，水域长 300 mm，宽 100 mm，四周设置有 5 mm 的完美匹配层，用来确保声波在自由场内进行传播<sup>[5-6]</sup>。模型中所选择的材料及其参数见表 1。

表 1 材料参数

Table 1 Material parameters

材料	$P/$ ( $\text{kg/m}^3$ )	$E/$ ( $\text{N/m}^2$ )	$\nu$	$c_l/$ ( $\text{m/s}$ )	$c_t/$ ( $\text{m/s}$ )
水	1 000			1 500	
钢	7 850	$2.05 \times 10^{11}$	0.28	5 777	3 194

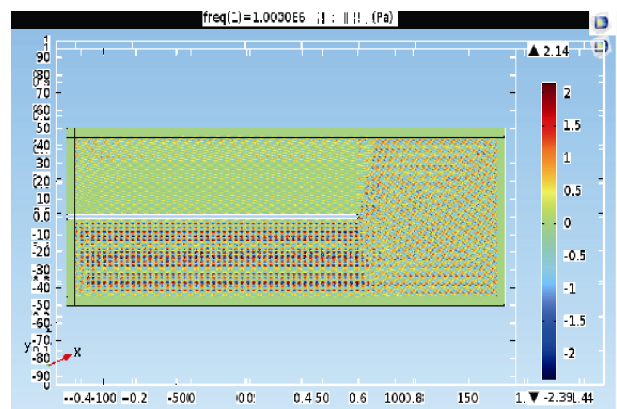


图 3 声压伪彩图

Fig. 3 Pseudo-color image of sound pressure

COMSOL 中导出的数据为离散的时域声场, 其声压伪彩图如图 3 所示。从图中体现不出散射声场中波的特征, 声场中各阶 Lamb 波的漏波相互交叠, 无法分辨出各阶 Lamb 波漏波, 通过对这些时域信号进行空间傅里叶变换<sup>[7]</sup>, 可以得到 Lamb 波的散射波波向量谱图。由于各阶 Lamb 波的相速度不同<sup>[8]</sup>, 所以通过波数分解可以将不同方向传播的波分离出来, 得到不同方向

波的强度, 得到散射波角度谱图, 即可得到漏波的能量。

### 3 弹性板散射声场构成分析

声波以模态 1 临界角入射到水下弹性板表面时, 会在弹性板中激励出 Lamb 波前向传播, 传播至直角板端反射并发生模态转换, 其散射声场如图 4 所示, 波向量空间如图 5 所示。

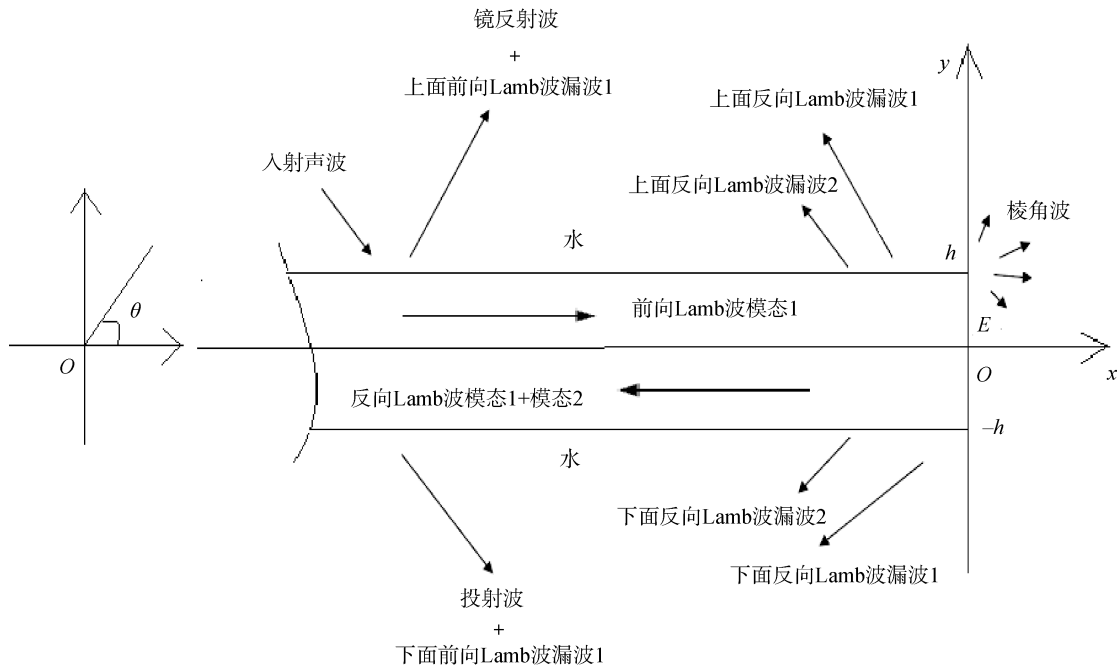


图 4 模态 1 临界角入射、散射声场

Fig. 4 Modal 1 critical angle incidence, scattering sound field

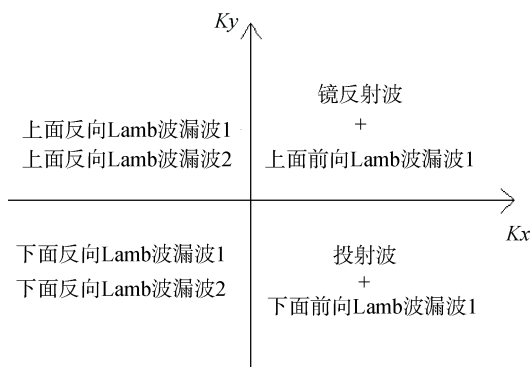


图 5 波向量空间

Fig. 5 Space of wave vector

### 4 仿真实验结果及分析

通过公式 (1) 计算出该模态 Lamb 波的临界

角<sup>[9]</sup>, 如表 2 所示。

表 2 Lamb 波临界角  
Table 2 Critical angle of Lamb wave

频率厚度积 / (MHz·mm)	模态	临界角 / (°)
2.6	$A_0$	32
	$A_1$	13

为了更好地研究水下弹性板中 Lamb 波的模态转换效率, 选取以上临界角作为声波的入射角, 得到的散射波波向量谱图及散射波角度谱图如图 6-7。

已知在频率厚度积为 2.6 MHz·mm 时, 钢板中的 Lamb 波存在 3 个模态, 即  $A_0$  模态、 $S_0$  模态及  $A_1$  模态。当声波以某模态 Lamb 波的临界角入射到

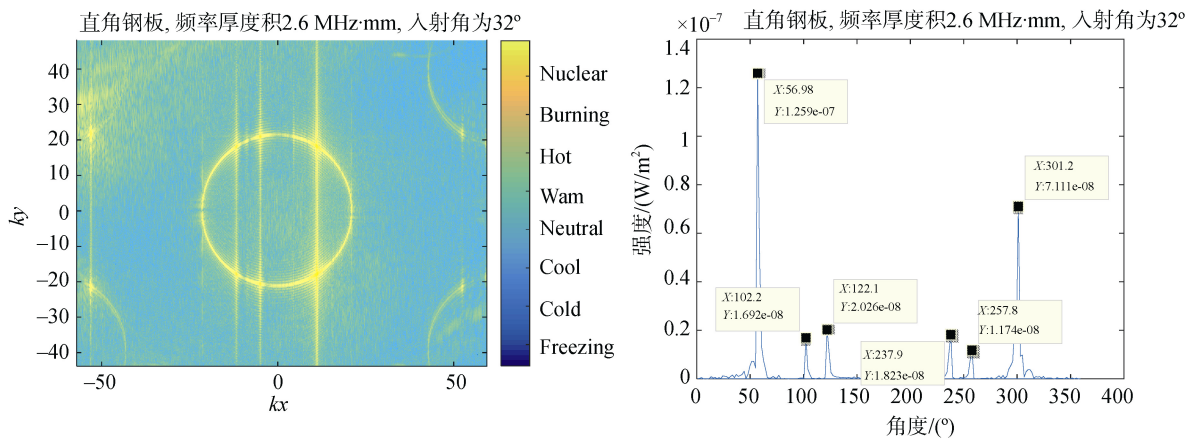


图 6 A<sub>0</sub> 模态入射, 波向量谱和角度谱

Fig. 6 A<sub>0</sub> modal incidence, wave vector spectrum and angle spectrum

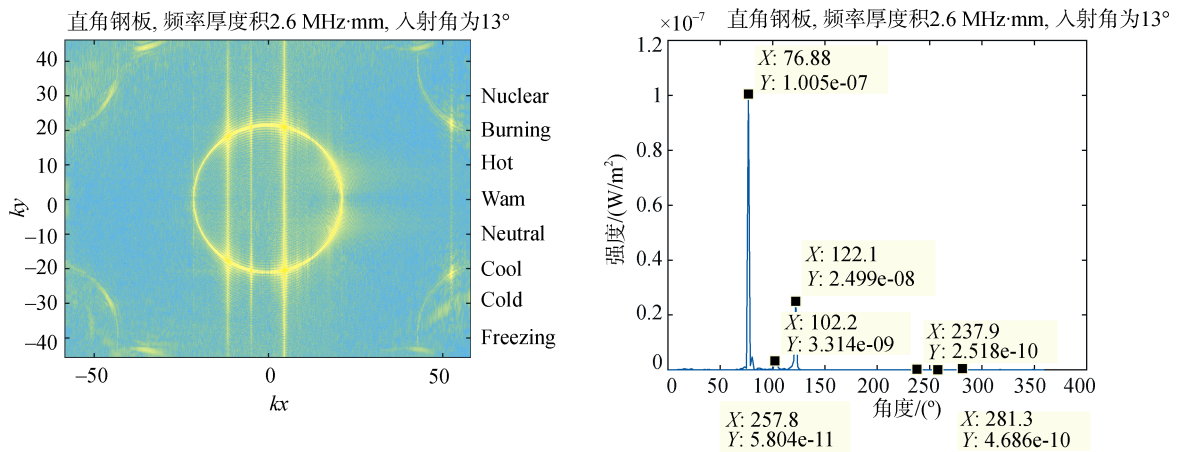


图 7 A<sub>1</sub> 模态入射, 波向量谱和角度谱

Fig. 7 A<sub>1</sub> modal incidence, wave vector spectrum and angle spectrum

弹性板表面时, 声波至少从 2 个方向出射到水中, 我们至少可以观察到 2 个弹性散射波亮点, 由于边界条件对称, 因此, 在散射波波向量谱图中至少可以观察到 4 个弹性散射波亮点。本次仿真实验中主要计算 A<sub>0</sub> 模态及 A<sub>1</sub> 模态的模式转换效率。

从图 6-7 中可以观察到棱角波亮点、弹性散射波亮点和镜反射波亮点。棱角波在图中为 2 条清晰的亮线, 它们关于横轴对称且相交于横轴, 其交点为镜反射波亮点。以临界角入射时 Lamb 波产生的弹性散射波亮点也能明显的观察到, 它出现在棱角波亮线上, 这些弹性散射波亮点也关于横轴对称。由于经过板端反射的反向 Lamb 波形成的弹性散射

波和板端形成的棱角波同时到达接收系统, 导致弹性散射波亮点出现在棱角波的亮线上。前向 Lamb 波传播至板端反射后, 接收系统会不断地接受到反向 Lamb 波, 由于假设钢板的一端为无穷大, 所以接收到的弹性散射波亮点上会出现一条清晰的亮线。声波在钢板的表面不断的反射, 接收系统会不断地接受到从表面透射出来的一部分声波, 从时间上无法分辨出离散的亮点, 所以镜反射波亮点上也会出现一条亮线。

下面我们分析水下弹性板中的前向 Lamb 波在板端反射后, 产生的反向 Lamb 波各模态能量的转换效率<sup>[9]</sup>。

设弹性板的表面积为常数  $s$ , 则有:

$$\begin{cases} E_{\lambda} = \overrightarrow{I_{\lambda}} \cdot \vec{s} = I_{\lambda} \cos \theta_{\lambda} \\ E_{\text{镜(透)}} = \overrightarrow{I_{\text{镜(透)}}} \cdot \vec{s} = I_{\text{镜(透)}} \cos \theta_{\text{镜(透)}} \\ E_{\text{漏}} = \overrightarrow{I_{\text{漏}}} \cdot \vec{s} = I_{\text{漏}} \cos \theta_{\text{漏}} \end{cases} \quad (2)$$

根据能量守恒定律:

$$E_{\lambda} = E_{\lambda 1} + (E_{\text{镜}} + E_{\text{上漏1}}) + (E_{\text{透}} + E_{\text{下漏1}}) + V \quad (3)$$

式中:  $E_{\lambda 1}$  为入射波以模态 1 的临界角入射时激发出的前向 Lamb 波在板中的能量;  $E_{\text{镜}}$  为入射波的镜反射波;  $E_{\text{透}}$  为入射波的透射波;  $E_{\text{上漏1}}$  和  $E_{\text{下漏1}}$  均为前向 Lamb 波的漏波;  $V$  为板端棱角波, 在这里我们假设  $V$  为小量忽略不计。

$$E_{\lambda 1} = E_{\lambda 1}' + E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'} + E_{\lambda 2}' + E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'} + V' \quad (4)$$

式中:  $E_{\lambda 1}'$  为与前向 Lamb 波模态 1 相同模态的反向 Lamb 波模态 1 在板中的能量;  $E_{\lambda 2}'$  为前向 Lamb 波在板端反射后, 发生模态转换时, 另一模态反向 Lamb 波模态 2 在板中的能量;  $E_{\text{上漏1}'}$  和  $E_{\text{下漏1}'}$  为反向 Lamb 波模态 1 的漏波;  $E_{\text{上漏2}'}$  和  $E_{\text{下漏2}'}$  为反向 Lamb 波模态 2 的漏波;  $V'$  为前向 Lamb 波在板端的透射波, 假设为小量忽略不计。

定义不同模态 Lamb 波的漏波系数分别为  $\eta_1$  和  $\eta_2$ , 则漏波与 Lamb 波有如下关系式:

$$\begin{cases} \eta_1 E_{\lambda 1} = E_{\text{上漏1}} + E_{\text{下漏1}} \\ \eta_1 E_{\lambda 1}' = E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'} \\ \eta_2 E_{\lambda 2}' = E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'} \end{cases} \quad (5)$$

由于入射波能量不变, 只是改变了入射角, 所以我们假设以相邻非临界角入射时的镜反射波和透射波大小近似等于以临界角入射时的镜反射波和透射波大小, 则用临界角入射时的镜发射波、透射波和前向 Lamb 波漏波之和的能量减去非临界角入射时的镜反射波和透射波的能量就近似等于前向 Lamb 波的漏波大小, 即:

$$E_{\text{上漏1}} + E_{\text{下漏1}} = (E_{\text{镜}} + E_{\text{上漏1}}) + (E_{\text{透}} + E_{\text{下漏1}}) - E_{\text{镜}'} - E_{\text{透}'} \quad (6)$$

式中:  $E_{\text{镜}'}$  为非临界角入射时的镜反射波;  $E_{\text{透}'}$  为非临界角入射时的透射波。

由公式 (2) - (5) 得:

$$\eta_1 = \frac{E_{\text{上漏1}} + E_{\text{下漏1}}}{E_{\lambda 1}} = \frac{(E_{\text{镜}} + E_{\text{上漏1}}) + (E_{\text{透}} + E_{\text{下漏1}}) - E_{\text{镜}'} - E_{\text{透}'}}{E_{\lambda} - (E_{\text{镜}} + E_{\text{上漏1}}) - (E_{\text{透}} + E_{\text{下漏1}})} \quad (7)$$

$$E_{\lambda 1}' = \frac{E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'}}{\eta_1} \quad (8)$$

$$\eta_2 = \frac{E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'}}{E_{\lambda 2}'} = \frac{E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'}}{E_{\lambda 1} - E_{\lambda 1}' - (E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'}) - (E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'})} \quad (9)$$

定义前向 Lamb 波在板端发生模态转换时的模态转换系数分别为  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ , 则有:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{E_{\lambda 1}' + E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'}}{E_{\lambda 1}} \\ \varphi_2 = \frac{E_{\lambda 2}' + E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'}}{E_{\lambda 1}} \end{cases} \quad (10)$$

基于以上的分析, 由空间散射波角度谱可以得到各阶散射波的最大声强幅值, 取有效值  $I$  则不同角度时的能量为

$$E_i = I_i s \cos \theta \quad (11)$$

已知入射波的声强为

$$I = \frac{P_e^2}{\rho c} = 3.333 \times 10^{-7} \text{ w/m}^2 \quad (12)$$

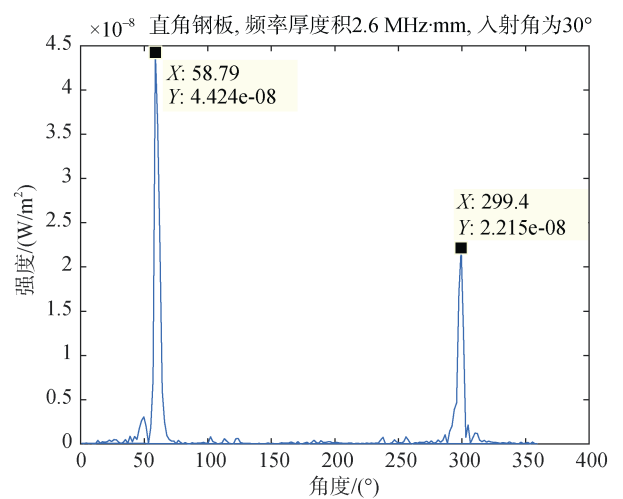


图 8  $A_0$  模态非临界角入射, 角度谱  
Fig. 8  $A_0$  modal non-critical angle incidence, angle spectrum

在水下，当声波以  $A_0$  模态 Lamb 波的临界角入射到弹性板的表面，激励出  $A_0$  模态前向 Lamb 波在弹性板中传播至板端反射后， $A_0$  模态和  $A_1$  模态反向 Lamb 波的转换效率计算如图 8。

表 3 波的能量  
Table 3 Energy of waves

分类	角度 / (°)	强度 / (W/m <sup>2</sup> )	单位板上的能量 / (W/m <sup>2</sup> )
$E_{\lambda}$		3.333E-07	1.766E-07
$E_{\text{镜}} + E_{\text{上漏1}}$	57.0	1.259E-07	6.862E-08
$E_{\text{透}} + E_{\text{下漏1}}$	301.2	7.111E-08	3.667E-08
$E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'}$	122.1	2.026E-08	1.075E-08
	237.9	1.823E-08	9.720E-09
$E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'}$	102.2	1.692E-08	3.561E-09
	257.8	1.174E-08	2.507E-09
$E_{\text{镜}'}$	58.8	4.424E-08	2.294E-08
$E_{\text{透}'}$	299.4	2.215E-08	1.082E-08
$E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'}$			7.153E-08
$E_{\text{兰1}}$			7.135E-08
$E_{\text{兰1}'}$			2.042E-08
$E_{\text{兰2}'}$			2.440E-08

表 4 前 2 阶 Lamb 波漏波系数

Table 4 Coefficients of first 2 orders' Lamb wave leakage

漏波系数	计算值
$\eta_1$	1.003
$\eta_2$	0.249

表 5 前 2 阶 Lamb 波在板端的转换效率

Table 5 Conversion efficiency of first 2 orders' Lamb wave at end of plate

转换效率	计算值
$\varphi_1$	0.573
$\varphi_2$	0.427

在水下，当声波以  $A_1$  模态 Lamb 波的临界角入射到弹性板的表面，激励出  $A_1$  模态前向 Lamb 波在弹性板中传播至板端反射后， $A_0$  模态和  $A_1$  模态反向 Lamb 波的转换效率计算如图 9。

从表 9 中可以看出 Lamb 波在水下弹性板直角板端发生模态转换时的转换效率仿真实验值与已

知论文的理论计算值<sup>[10]</sup>误差率分别为 9.53%和 5.49%。分析误差的来源主要有以下几方面：首先，在仿真实验中划分的网格数量不够精细，导致数据采集点数减少，分辨率降低；其次，空间傅里叶变换时存在频谱泄漏的现象；再次，在分析数据时，不同波之间做的是相干叠加，使得数据的准确度下降。

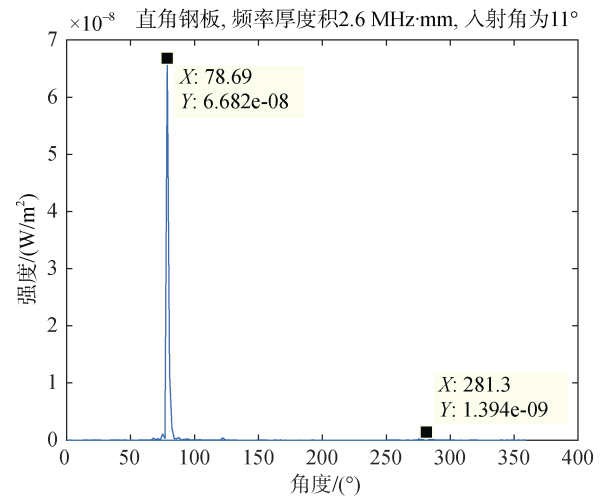


图 9  $A_1$  模态非临界角入射，角度谱

Fig. 9  $A_1$  modal non-critical angle incidence, angle spectrum

表 6 波的能量

Table 6 Energy of waves

分类	角度 / (°)	强度 / (W/m <sup>2</sup> )	单位板上的能量 / (W/m <sup>2</sup> )
$E_{\lambda}$		3.333E-07	7.468E-08
$E_{\text{镜}} + E_{\text{上漏1}}$	77.0	1.005E-07	2.267E-08
$E_{\text{透}} + E_{\text{下漏1}}$	281.3	4.686E-10	9.068E-11
$E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'}$	102.2	3.314E-09	6.974E-10
	257.8	5.804E-11	1.239E-11
$E_{\text{上漏2}'} + E_{\text{下漏2}'}$	122.1	2.499E-08	1.326E-08
	237.9	2.518E-10	1.343E-10
$E_{\text{镜}'}$	78.6	6.682E-08	1.325E-08
$E_{\text{透}'}$	281.3	1.394E-09	2.697E-10
$E_{\text{上漏1}'} + E_{\text{下漏1}'}$			9.242E-09
$E_{\text{兰1}}$			5.192E-08
$E_{\text{兰1}'}$			3.987E-09
$E_{\text{兰2}'}$			3.383E-08



表7 前2阶Lamb波漏波系数

Table 7 Coefficients of first 2 orders' Lamb wave leakage

漏波系数	计算值
$\eta_1$	0.178
$\eta_2$	0.396

表8 前2阶Lamb波在板端的转换效率

Table 8 Conversion efficiency of first 2 orders' Lamb wave at end of plate

转换效率	计算值
$\varphi_1$	0.090
$\varphi_2$	0.910

表9 Lamb波转换效率对比

Table 9 Comparison of conversion efficiency of Lamb waves

频率厚度积/ (MHz·mm)	Lamb 波模态	转换效率	转换效率
		(理论值) $A_0: A_1$	(仿真实验值) $A_0: A_1$
2.6	$A_0$	0.528:0.472	0.573: 0.427
	$A_1$	0.860:0.140	0.91: 0.090

## 5 结束语

本文结合Lamb波在水下弹性板散射原理,以Lamb波的反对称模态为例,通过COMSOL软件进行了仿真实验,根据能量守恒定律,推导了Lamb波在水下弹性板直角板端反射并发生模态转换时的模态转换效率计算公式,量化了实验结果,并与

已知论文的理论计算值进行了比较。

## 参考文献

- [1] OSBORNE M F M, HART S D. Transmission, reflection, and guiding of exponential pulse by a steel plate in water[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1945, 17(1): 1-18.
- [2] CHO Y. A boundary element solution for a mode conversion study on the edge reflection of Lamb waves[J]. J. Acoust. Soc. Am., 1996, 99(4): 2097-2109.
- [3] 中仿科技公司. COMSOL Multiphysics 有限元法多物理场建模与分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 2007.
- [4] 卢超, 程建军, 陆铭慧. 表面开口矩形缺陷 Lamb 波散射的边界元模拟[J]. 南昌航空大学学报, 2008, 22(2): 26-30.
- [5] 魏运飞, 卢超. 薄板腐蚀缺陷 Lamb 波成像检测的有限元模拟[J]. 测试技术学报, 2010, 24(3): 259-264.
- [6] 魏运飞, 卢超. 薄板声—超声检测时 Lamb 波传播模式的有限元模拟[J]. 无损检测, 2009, 31(7): 520-524.
- [7] 孙铁林, 孙辉, 陈文剑, 等. 弹性板中 Lamb 波在板端面的模态转换研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2013, 34(10): 1267-1273.
- [8] 刘镇清, 他得安. 用二维傅里叶变换识别兰姆波模式的研究[J]. 声学技术, 2000, 19(4): 583-589.
- [9] 孔慧敏, 范威. 不同材料弹性板 Lamb 波相速度和衰减的比较[J]. 声学技术, 2011, 30(3): 91-93.
- [10] 孙铁林. 水下弹性板及柱壳的弹性散射研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2014.

(责任编辑: 张曼莉)