

由磁矩计算磁场强度

张新邦, 陈德祥, 王东盛
(北京控制工程研究所, 北京 100190)

摘要 提出由磁矩计算磁场强度的公式。从磁矩的偶极子模型和电流环模型分别进行推导, 得到相同的磁场强度计算公式, 讨论了公式应用条件和方法。由于公式简单, 有利于对磁矩周围磁场的理解分析和计算。同时也提供了一个由磁场强度求磁矩的途径。

关键词 磁矩; 磁场强度; 磁感应强度; 偶极子; 电流环

中图分类号 U665.18 **文献标识码** A

Calculating Magnetic Field Intensity by Magnetic Moment

ZHANG Xinbang, CHEN Dexiang, WANG Dongsheng
(Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China)

Abstract An formula is presented to calculate the magnetic field intensity by magnetic moment. Deriving separately from magnetic moment model of dipole and electric current loop, the same formula is derived, and the application condition and method of using the formula is discussed. Because the formula is simple, it is conducive to analyze and calculate the magnetic field around the magnetic moment. Moreover, a new way is given to get the magnetic moment by the magnetic field intensity.

Key words magnetic moment; magnetic field intensity; magnetic induction intensity; dipole; electric current loop

0 引言

磁学中磁矩的模型有偶极子模型和电流环模型^[1], 各模型有自己经典的计算周围磁场强度的方法, 但计算复杂, 不易使用和推广, 所以推导一个统一简单有效的由磁矩计算磁场强度的解析表达式是有意义的。

通过对磁矩的2种模型进行推导可得到简单的磁场强度计算公式, 这有利于对磁矩周围磁场强度的分析理解和计算。同时如果已知磁矩位置、测点位置和测点的磁场强度, 根据表达式可以反推出磁矩的值。

1 由磁矩计算磁场强度公式

物体磁性能的大小可用磁矩来描述, 由磁矩可

计算出空间某点 Q 的磁场强度, 当物体 (磁矩载体) 的尺寸相对到点 Q 的距离是小量, 则 Q 点的磁场强度可以用简单的公式来表达。

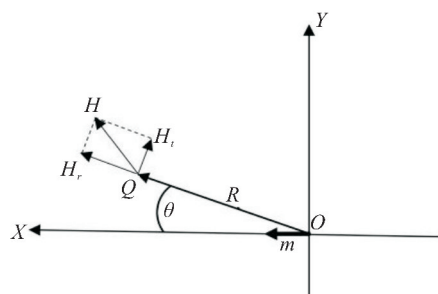


图1 由磁矩求磁场强度示意图

Fig. 1 Schematic diagram of calculating magnetic field intensity by magnetic moment

设磁矩 m 位于坐标系原点 O , 方向与 x 轴相同。点 Q 在 xy 平面内, 用 R 代表矢量 $\overrightarrow{OQ}$, m 与 R 之

间的夹角为 θ 。在 Q 点由 m 贡献的磁场强度为 H , H 的径向分量为 H_r ,切向分量为 H_t ,如图1所示。 R 与 m 分别为 R 与 m 的模。

当磁矩的物理尺寸相对于 R 是一个小量时,即如果由通电螺旋线圈或磁棒产生的磁矩,要求螺旋线圈或磁棒的长度相对于 R 是小量;如果由电流环产生的磁矩,电流环的直径相对于 R 是小量,则有:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \frac{m}{4\pi} \left(\frac{2\cos\theta}{R^3} \right) \\ H_t &= \frac{m}{4\pi} \left(\frac{\sin\theta}{R^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: H_r 和 H_t 是磁场强度 H 的径向和切向分量, $A \cdot m^{-1}$; m 为磁矩, $A \cdot m^2$; R 为距离, m 。当介质为空气时, Q 点的磁感应强度为

$$B = \mu_0 H$$

式中: μ_0 为真空磁导率, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$; B 为磁感应强度, T 。如取 B 的单位为 nT ,则有

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{200m\cos\theta}{R^3} \\ B_t &= \frac{100m\sin\theta}{R^3} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

当 $\theta = 0$ 时有

$$\left. \begin{aligned} B_r &= \frac{200m}{R^3} \\ B_t &= 0 \end{aligned} \right\}$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时有

$$\left. \begin{aligned} B_r &= 0 \\ B_t &= \frac{100m}{R^3} \end{aligned} \right\}$$

上面公式说明磁场强度反比于距离的立方,所以可简称为反立方公式。

2 公式推导

2.1 由偶极子组成磁矩

偶极子中心位于坐标原点 O ,磁极强度为 p ,极间距离 AB 为 l ,如图2所示,则磁矩 $m = pl$,方向与 x 轴相同。在 xy 平面内有 Q 点,坐标为 $(x, y, 0)$,若 Q 点不在 xy 平面内,则适当转动 x 轴即可。

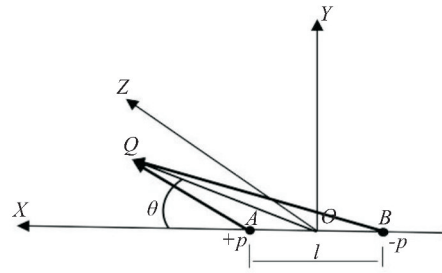


图2 由偶极子组成磁矩

Fig. 2 Magnetic moment composed by dipole

根据由磁极计算磁场的公式, Q 点的磁场强度 H 为

$$H = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{p\vec{AQ}}{(AQ)^3} - \frac{p\vec{BQ}}{(BQ)^3} \right) \quad (3)$$

设 $R = OQ$, R 与 x 轴的夹角为 θ ,根据三角公式有

$$(AQ)^2 = R^2 + \frac{l^2}{4} - Rl\cos\theta$$

$$\text{即 } (AQ)^3 = \left(R^2 + \frac{l^2}{4} - Rl\cos\theta \right)^{3/2}$$

$$\text{同样有 } (BQ)^3 = \left(R^2 + \frac{l^2}{4} + Rl\cos\theta \right)^{3/2}$$

由于 $x = R\cos\theta$, $y = R\sin\theta$

$$\vec{AQ} = \begin{bmatrix} x - 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\theta - 0.5l \\ R\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{BQ} = \begin{bmatrix} x + 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\cos\theta + 0.5l \\ R\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

由(3)得到

$$H = \frac{p}{4\pi} \left(\frac{1}{\left(R^2 + \frac{l^2}{4} - Rl\cos\theta \right)^{3/2}} \begin{bmatrix} x - 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\left(R^2 + \frac{l^2}{4} + Rl\cos\theta \right)^{3/2}} \begin{bmatrix} x + 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

当 $R \gg l$,则有

$$H = \frac{p}{4\pi} \left(\frac{1}{\left(R - \frac{l\cos\theta}{2} \right)^3} \begin{bmatrix} x - 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\left(R + \frac{l\cos\theta}{2} \right)^3} \begin{bmatrix} x + 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\left(R + \frac{l \cos \theta}{2}\right)^3} \begin{bmatrix} x + 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg) = \\
& \frac{p}{4\pi} \frac{\left(R + \frac{l \cos \theta}{2}\right)^3}{\left(R - \frac{l \cos \theta}{2}\right)^3 \left(R + \frac{l \cos \theta}{2}\right)^3} \begin{bmatrix} x - 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} - \\
& \frac{\left(R - \frac{l \cos \theta}{2}\right)^3}{\left(R - \frac{l \cos \theta}{2}\right)^3 \left(R + \frac{l \cos \theta}{2}\right)^3} \begin{bmatrix} x + 0.5l \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg) = \\
& \frac{p}{4\pi} \frac{1}{\left(R^2 - \frac{l^2 \cos^2 \theta}{4}\right)^3} \begin{bmatrix} lR^3(2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ 3R^3 l \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \\
& \frac{m}{4\pi R^3} \begin{bmatrix} 2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 3\cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

设图2所示的坐标系是 r 坐标系,将 r 坐标系绕 z 轴(即绕 O 点顺时针)转角度 θ ,得到新的 s 坐标系,转换矩阵为 A ,有

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在 s 坐标系内, Q 点磁场强度表示为 $\mathbf{H}^{(s)}$,有 $\mathbf{H}^{(s)} = A\mathbf{H} =$

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{4\pi R^3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ 3\cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \\
& \frac{m}{4\pi R^3} \begin{bmatrix} 2\cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)
\end{aligned}$$

s 坐标系内 x 轴用 x_s 表示, y 轴用 y_s 表示,有 x_s 与 H_r 同方向, y_s 与 H_t 同方向。所以式(4)和式(1)是相同的。

2.2 由电流环组成磁矩

在坐标系 $O-XYZ$ 内,有正方形电流环 $ABCD$ 在 yz 平面内。(由于磁矩正比于电流环面积,与环的形状无关,为计算方便,设电流环为正方形。)电流环中心在坐标系原点 O (见图3),电流环的电

流强度为 i ,电流环边长 l ,则磁矩 $m = il^2$,磁矩方向与 x 轴相同。 Q 点在 xy 平面内,坐标为 $(x, y, 0)$ 。若 Q 点不在 xy 平面内,则适当转动 x 轴后即可。 E, F, G, H 分别为正方形四个边长的中心。

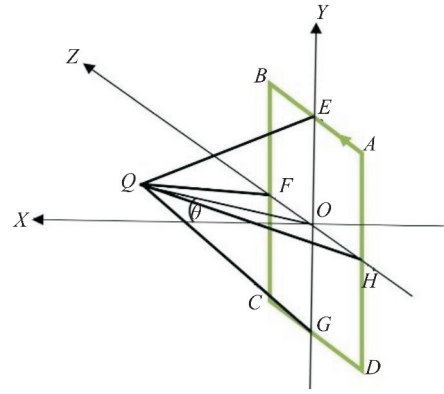


图3 由电流环组成磁矩

Fig. 3 Magnetic moment composed by current loop

先分析导线 AB 在 Q 点产生的场强 $\mathbf{H}_{AB}$ 。

在导线 AB 上取一导线元 $d\mathbf{l}$,其矢量为 $d\mathbf{l}$,设此导线元到 Q 点的矢量为 $\mathbf{r}$,模为 r ,设矢量 $\overrightarrow{EQ} = \mathbf{R}_E$, $\mathbf{R}_E$ 与 $\mathbf{r}$ 的夹角为 α ,根据毕奥-萨伐尔定律在 Q 点由 $d\mathbf{l}$ 贡献的磁场强度 $d\mathbf{H}_{AB}$ 为

$$d\mathbf{H}_{AB} = \frac{i}{4\pi r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{r} = \frac{i}{4\pi r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{R}_E$$

于是 $\mathbf{H}_{AB} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{i}{4\pi r^3} d\mathbf{l} \times \mathbf{R}_E \right) =$

$$\frac{i}{4\pi} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^3} d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{R}_E \quad (5)$$

式中 $\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^3} d\mathbf{l} \right)$ 是一矢量,其方向与 $\overrightarrow{AB}$ 相同,其大小为 $\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^3} d\mathbf{l} \right)$ 。

为讨论方便,将图3内导线 AB 和 Q 点等单独显示如图4所示,有 $r = \frac{R_E}{\cos \alpha}$, $d\mathbf{l} = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}$,于是有

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r^3} d\mathbf{l} = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\cos \alpha}{R_E^2} d\alpha = \frac{l}{R_E^2 \sqrt{R_E^2 + \frac{l^2}{4}}}$$

式中 β 是 $\mathbf{R}_E$ 与直线 BQ 的夹角。

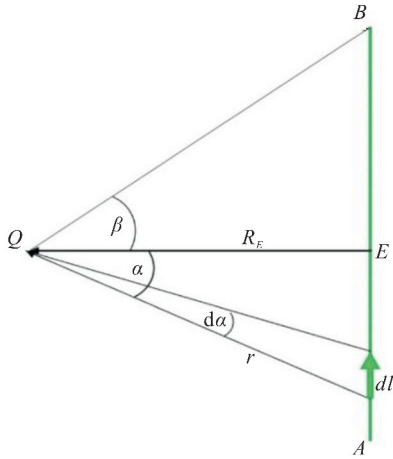


图4 载流导线AB产生的磁场

Fig. 4 Magnetic field generated by current carrying wire AB

根据式(5)可以得到下面方程,并为方便对电流环其他边的讨论,方程写成如下形式:

$$\mathbf{H}_{AB} = \frac{i}{4\pi(EQ)^2 \sqrt{(EQ)^2 + \frac{l^2}{4}}} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{EQ}$$

$$\text{由于 } \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{bmatrix}, \overrightarrow{EQ} = \begin{bmatrix} x \\ y - 0.5l \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{得到 } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{EQ} = \begin{bmatrix} 0.5l^2 - ly \\ xl \\ 0 \end{bmatrix}$$

有

$$\mathbf{H}_{AB} = \frac{i}{4\pi(EQ)^2 \sqrt{(EQ)^2 + \frac{l^2}{4}}} \begin{bmatrix} 0.5l^2 - ly \\ xl \\ 0 \end{bmatrix}$$

同样

$$\mathbf{H}_{BC} = \frac{i}{4\pi(FQ)^2 \sqrt{(FQ)^2 + \frac{l^2}{4}}} \begin{bmatrix} 0.5l^2 \\ 0 \\ lx \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{CD} = \frac{i}{4\pi(GQ)^2 \sqrt{(GQ)^2 + \frac{l^2}{4}}} \begin{bmatrix} ly + 0.5l^2 \\ -lx \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{DA} = \frac{i}{4\pi(HQ)^2 \sqrt{(HQ)^2 + \frac{l^2}{4}}} \begin{bmatrix} 0.5l^2 \\ 0 \\ -lx \end{bmatrix}$$

设 $R = OQ$, θ 为 R 和 x 轴的夹角,有

$$R^2 = x^2 + y^2, x = R\cos\theta, y = R\sin\theta$$

得到

$$(EQ)^2 = R^2 - lR\sin\theta + \frac{l^2}{4}$$

当 $R \gg l$ 有

$$(EQ)^2 \sqrt{(EQ)^2 + \frac{l^2}{4}} = \left(R - \frac{l\sin\theta}{2}\right)^3$$

同样有

$$(FQ)^2 \sqrt{(FQ)^2 + \frac{l^2}{4}} = R^3$$

$$(GQ)^2 \sqrt{(GQ)^2 + \frac{l^2}{4}} = \left(R + \frac{l\sin\theta}{2}\right)^3$$

$$(HQ)^2 \sqrt{(HQ)^2 + \frac{l^2}{4}} = R^3$$

于是 Q 点的磁场强度 $\mathbf{H}$ 为

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{AB} + \mathbf{H}_{BC} + \mathbf{H}_{CD} + \mathbf{H}_{DA}$$

设 $\mathbf{H}$ 的3个分量为 H_x, H_y, H_z , 于是

$$H_x = \frac{i}{4\pi} \left(\frac{0.5l^2 - ly}{\left(R - \frac{l\sin\theta}{2}\right)^3} + \frac{ly + 0.5l^2}{\left(R + \frac{l\sin\theta}{2}\right)^3} + \frac{l^2}{R^3} \right) = \frac{m}{4\pi R^3} (2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$H_y = \frac{i}{4\pi} \left(\frac{lx}{\left(R - \frac{l\sin\theta}{2}\right)^3} - \frac{lx}{\left(R + \frac{l\sin\theta}{2}\right)^3} \right) = \frac{3m\cos\theta\sin\theta}{4\pi R^3}$$

$$H_z = 0$$

即有

$$\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi R^3} \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 3\cos\theta\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

设图3所示是 r 坐标系,将 r 坐标系绕 z 轴转 θ 角,得到新的 s 坐标系,转换矩阵为 $\mathbf{A}$,在 s 坐标系内 Q 点的磁场强度值表示为 $\mathbf{H}^{(s)}$,则有

$$\mathbf{H}^{(s)} = \mathbf{A}\mathbf{H} =$$

$$\frac{m}{4\pi R^3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta - \sin^2\theta \\ 3\cos\theta\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{m}{4\pi R^3} \begin{bmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

s 坐标系内的 x 轴用 x_s 表示, y 轴用 y_s 表示, 有 x_s 与 H_r 同方向, y_s 与 H_t 同方向。所以公式(6)和公式(1)的内容是一样的。

应当指出, 上面的推导方法不佳, 十分繁杂。许多教科书内有相似内容^[2-3], 其推导过程简洁而优美, 但需要有场论知识。但教科书内推导结果的表达方式不佳, 其推导的目的只是证明在远距离情况下, 偶极子和电流环的贡献完全一样。本文将2个结果综合, 提出了由磁矩计算磁场的表达式, 这是由物体的与磁有关物理量直接计算磁场的第3个公式, 前2个分别是毕奥-萨伐尔定律和磁极公式。

3 公式应用分析

前面提到应用公式的条件是物体(磁矩载体)的尺寸相对于到测点的距离是小量, 下面对此作进一步分析。

3.1 公式应用条件

下面分析这小量的具体概念。

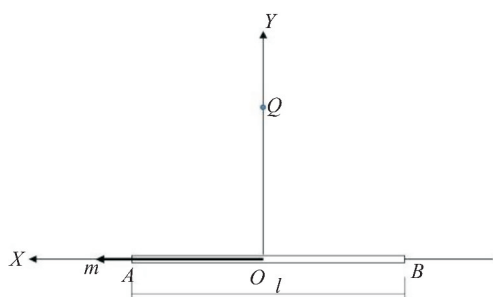


图5 公式应用的条件分析

Fig. 5 Conditional analysis of formula application

以图5为例, 有通电螺旋线圈 AB 的中心位于坐标原点, 线圈的磁矩为 m , 线圈长度为 l , 有 Q 点位于 y 轴, 坐标为 $(0, y, 0)$ 。

当 $m = 20 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, $l = 1 \text{ m}$, y 取不同数值, 分别

应用反立方公式和偶极子公式得到 Q 点的磁感应强度数据, 由于数据的 y 、 z 分量都为0, 所以只选用 x 轴分量, 见表1。

由表1看出: 当距离是磁棒长度2倍时误差在10%以内, 3倍时误差在5%以内, 6倍时误差约为1%, 所以可按照实际情况, 当距离是磁棒长度的3~6倍时可以应用反立方公式。

表1 反立方公式和偶极子公式数据比较

Table 1 Data comparison of inverse cubic formula and dipole formula

y/m 距离	B_1/nT (反立方公式)	B_2/nT (偶极子公式)	误差比例 $\left \frac{B_2 - B_1}{B_2} \right $
0.5	-16 000.0	-5 656.93	1.828
1	-2 000.00	-1 431.11	0.398
2	-250.000	-228.271	0.095 2
3	-74.074	-71.092	0.042 0
4	-31.250	-30.532	0.023 5
5	-16.000	-15.763	0.015 0
6	-9.259	-9.164	0.010 4

3.2 近距离时如何应用公式

设物体是均匀磁化, 物体磁矩为 m , 体积为 V , 单位体积的磁矩为 M , (M 又称为磁化强度, $M = m/V$), 将物体划分成众多的小单元, 每个单元的体积 dV , 每个单元的磁矩为 $dm = M dV$ 。由于每个单元的尺寸比较小, 相比于测点的距离是小量, 可以应用反立方公式, 将所有单元的计算结果求和即得到需要的结果。这种将物体划分成众多小单元磁矩的方法称为磁矩陈列模型法。

以上面的图5为例, 当 $y = 0.5 \text{ m}$ 时, 由于距离太近不合适使用反立方公式。参考磁矩阵列模型法, 将螺旋线圈沿长度方向分成多个(如100个)等长的小单元, 则每单元的长度 $dl = 0.01 \text{ m}$, 每单元的磁矩 $dm = 0.2 \text{ A} \cdot \text{m}^2$, 对于每一单元可以应用反立方公式, 再将结果相加可以得到 Q 点的磁场强度。计算结果发现和应用偶极子模型的计算结果几乎完全一样(误差小于0.001%)。所以正确应用磁矩陈列法, 结果是足够精确的。

3.3 公式应用分析

文献[4-5]论述了舰船磁场的特性、磁场测

量、磁场推算等内容。文献[6-8]重点对潜艇磁场数学模型和磁场测量方法进行论述。以上的论述分析中都没有用到磁矩作为研究工具。本文提出了由磁矩计算磁场强度的反立方公式,以及近距离应用所需要的磁矩阵列法,这样就产生了新的基于磁矩的舰船磁场计算分析方法,对海洋中舰船磁场的研究有重要的意义。

4 结束语

1)传统的应用偶极子和电流环模型计算磁场强度的方法不便于实际应用,提出应用磁矩计算磁场强度的反立方公式,有利于磁场的分析和计算。

2)以反立方公式为基础,提出磁矩阵列模型法,满足了近距离计算的要求。

3)公式说明磁场强度与距离的立方成反比,随着距离的增加,场强快速衰减,物体磁性的细微特征很快消失,即使如长度 l 远远大于宽度 d 这样的粗大特征,在距离大于 $3l \sim 6l$ 时可以忽略,只剩下磁矩是主角。这对于估计计算舰船潜艇等周围的场强分布是有意义的。

参考文献

- [1] JILES D. 磁学及磁性材料导论[M]. 肖春涛,译. 兰州:兰州大学出版社,2003.
- [2] 毕德显. 电磁场理论[M]. 北京:电子工业出版社,1985.
- [3] 谢处方,饶克谨. 电磁场与电磁波[M]. 北京:人民教育出版社,1979.
- [4] 叶平贤,龚沈光. 舰船物理场[M]. 北京:兵器工业出版社,1992.
- [5] 朱英富,张国良. 舰船隐身技术[M]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2015.
- [6] 章尧卿,毛世超. 潜艇空间磁场的建模分析与运用[J]. 舰船电子工程,2018,38(1):136-139.
- [7] 周家新,陈建勇,单志超,等. 航空磁探中潜艇磁场建模方法分析[J]. 海军航空工程学院学报,2017,32(1):143-148.
- [8] 衣军,张朝阳,虞伟乔. 基于地磁模拟的潜艇感应磁场测量[J]. 上海海事大学学报,2015,36(1):61-64.

(责任编辑:张曼莉)