任意姿态下矢量物理量的测量数据修正计算方法探讨

程国胜
(中国船舶重工集团公司第七一〇研究所,湖北 宜昌 443003)

摘　要　工程中矢量物理量的测量,例如水中目标的磁场、电场的测量,通常测量传感器的姿态角是任意或随机的,因此需要对传感器平台的姿态角进行测量,并由此将矢量物理量的测量数据修正到确定的参照坐标系。分析了文献中通常使用的修正算法,即根据传感器平台姿态角测量值直接引用欧拉角旋转变换公式,分析表明这一算法存在原理性误差。在此基础上,推导出了合理的变换计算式,可以直接应用在任意姿态下矢量物理量的测量数据修正计算,以及类似的坐标变换计算中。

关键词　矢量测量;姿态修正;坐标变换
中图分类号　TB22　　**文献标识码**　A

Discussion on Correcting Algorithm of Measurement Data of Physical Vector under Arbitrary Attitude

CHENG Guosheng
(No. 710 R&D Institute, CSIC, Yichang 443003, China)

Abstract　When measuring the physical vectors in engineering such as underwater target´s magnetic and electric fileds, the attitude angle of the measurement sensor is usually arbitrary or random, so the attitude angle of the sensor platform needs to be measured, thereby the measured data of the physical vector are corrected to the determined reference coordinate system. In this paper, the correcting algorithm commonly used in the literature is analyzed, that is, the Euler angle rotation transformation formula is directly quoted according to the measured value of the attitude angle of sensor platform. The analysis shows that there is a principle error in this algorithm. On this basis, a reasonable transformation formula is deduced, which can be applied directly in the correcting algorithm of measured data of the physical vector in arbitary attitude and similar coordinate transformation calculation.

Key words　vector measurement; attitude correction; coordinate transformation

0　引言

对矢量物理量的测量,如水中目标的磁场、电场等目标特性的测量,要求测量出该物理量在确定的正交坐标系(通常为当地水平坐标系或者导航坐标系)中的 3 个方向分量,而在测量实施中,测量传感器或其安装平台的姿态角往往是随机但可以测量的。因此,在测量数据的处理中,需要对在任意姿态下测量的矢量物理量数据进行修正,即对测量的矢量结果在不同坐标系之间进行转换。在大多数现有文献和工程实践中,修正算法都是直接引用欧拉角旋转变换公式[1-3]。但是仔细分析,欧拉角旋转变换公式是基于有先后次序的绕坐标轴的旋转变换,而实际测量的姿态角,有陀螺仪测量、惯导系统测量、倾斜仪测量、磁场传感器测量以及多传感器组合测量,测量传感器或设备输出的姿态角有不同的定义,与旋转欧拉角的定义不一定完全一致。因此,直接引用欧拉角旋转变换公式进行修

收稿日期:2018-06-22
作者简介:程国胜(1966-),男,高级工程师,主要从事水下目标特性、水声工程技术和水中兵器专业工程研究。

正计算,可能存在原理性误差。在运动载体中的矢量测量以及导航定位中的坐标旋转变换中也都存在类似的问题。

本文对姿态角定义和传感器测量原理进行分析,推导姿态角与旋转欧拉角的关系,进而推导出利用可测量的姿态角进行坐标变换修正的坐标转换矩阵。

1　坐标系及欧拉旋转变换

1.1　常用坐标系

在导航和矢量测量中常用的有以下 5 种正交右手坐标系[4]:

1)地心惯性坐标系 $O_IX_IY_IZ_I$,简记为 I 坐标系;

2)地心地球固定坐标系 $O_EX_EY_EZ_E$,简记为 E 坐标系;

3)导航坐标系 $O_NX_NY_NZ_N$,简记为 N 坐标系,主要用于确定载体相对于东、北和天方向的速度和位置;

4)当地水平坐标系 $O_LX_LY_LZ_L$,简记为 L 坐标系,主要用于确定载体相对于北、东和地方向的姿态;

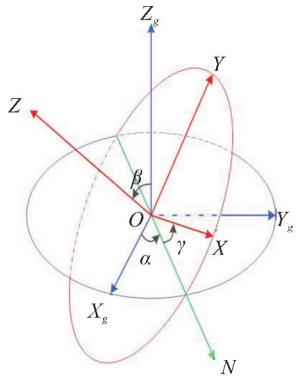
5)载体坐标系 $O_BX_BY_BZ_B$,简记为 B 坐标系,主要用于描述载体的姿态(通常为俯仰角、横滚角和偏航角)。

导航应用中的测量计算如姿态、位置、速度、加速度、角速度等参数,常常需要在这些不同坐标系之间进行平移和旋转变换计算,而一般矢量物理量的测量中,最常用到的是其中的 B 坐标系以及 N 和 L 坐标系间的变换计算。

1.2　欧拉角

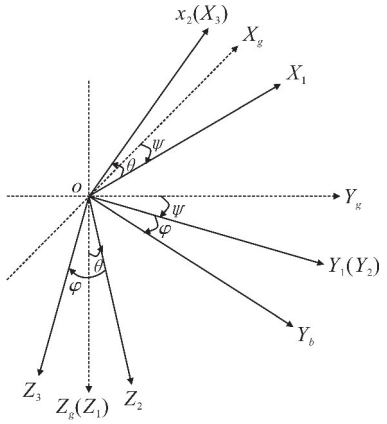
如图 1(a)所示,固定坐标系 $OX_gY_gZ_g$(通常为 L 坐标系)和载体坐标系 $OXYZ$ 有共同原点,ON 为 OX_gY_g 平面和 OXY 平面的相交线,ON 与平面 Z_gOZ 垂直,称为节线。

由坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 到 $OXYZ$ 的转换步骤为:以轴 OZ_g 和 OZ 为基本轴,其垂直面 OX_gY_g 和 OXY 为基本平面。首先,在坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 中绕 OZ_g 轴逆时针方向(从 OZ_g 轴正向看)旋转角度 α,OX_g 轴到达 ON;再绕 ON 轴逆时针旋转角度 β,OZ_g 轴到达 OZ;最后绕 OZ 轴逆时针旋转角度 γ,ON 轴到达 OX,得到坐标系 $OXYZ$。这种定义对应的 3 个角度(α,β,γ)称为欧拉角,其名称来源于天文学,最早由欧拉在 1776 年提出,其中 β 称为章动角,α 称为进动角,γ 称为自转角[5]。



(a)Z-X-Z 顺序欧拉角定义示意图

(a)Z-X-Z order Euler angles



(b)Z-Y-X 顺序欧拉角定义示意图

(b)Z-Y-X order Euler angles

图 1　两种不同顺序欧拉角定义示意图

Fig. 1　Schematic diagram of definition of Euler angles in 2 different orders

实际上,对欧拉角的名称、符号以及旋转顺序并没有统一的规定,使用时必须先明确定义。图 2(a)是按照 Z 轴-X 轴-Z 轴依次旋转的顺序,称为 ZXZ 顺序,也称为 313 顺序,或者按照中间字母 X 区分称为 X 顺规(实际上 X 顺规有 4 种不同形式);对应定义的欧拉角可以称为 Z-X-Z 顺序欧拉角。合乎规则的顺规共有 12 种,分别是:ZXZ,ZXY,YXZ,YXY,XYX,XYZ,ZYX,ZYZ,XZX,XZY,

YZX,YZY。欧拉角及其旋转变换作为一种纯粹的数学概念,12 种合乎规则的顺规都是可用的,不同顺规对应不同的欧拉角和不同的旋转变换矩阵。

1.3 欧拉角旋转变换

在惯性导航等运动分析中,常常使用 Z-Y-X 顺序定义欧拉角,实际上不同的旋转顺序对应不同的旋转变换矩阵和旋转结果,一种旋转结果可以对应许多组不同的旋转欧拉角。为了与常用的姿态角定义和测量计算方法一致,这里选择 Z-Y-X 顺序欧拉角(ψ,θ,φ)对欧拉角旋转变换进行分析。

如图 1(b)所示,固定坐标系 $OX_gY_gZ_g$(一般是 L 坐标系中的 NED 坐标系)和载体坐标系 $OX_BY_BZ_B$ 有共同原点 O,$OX_gY_gZ_g$ 依次经过 Z、Y、X 轴 3 次连续旋转,得到 $OX_BY_BZ_B$,具体旋转过程及其坐标变换如下:

首先,坐标系绕 Z 轴旋转,旋转角度 ψ 为正(沿 Z 轴正方向看,逆时针方向旋转 ψ 角度定义为正角度,下同),由 $OX_gY_gZ_g$ 旋转到 $OX_1Y_1Z_1$,此时 OZ_1 轴与 OZ_g 轴重合;

第二步,坐标系绕 Y 轴旋转正角度 θ,由 $OX_1Y_1Z_1$ 旋转到 $OX_2Y_2Z_2$,此时 OY_1 轴与 OY_2 轴重合;

第三步,坐标系绕 X 轴旋转正角度 φ,由 $OX_2Y_2Z_2$ 旋转到 $OX_BY_BZ_B$。

在上述每一步变换中,按照同一矢量在 2 个不同坐标系中的正交分解进行计算,求解同一矢量在不同坐标系中的量值关系,最后得到:

$$\boldsymbol{X_B}=\boldsymbol{C_g^B}*\boldsymbol{X_g},\text{或者},\boldsymbol{X_g}=\boldsymbol{C_B^g}*\boldsymbol{X_B}$$

式中:$\boldsymbol{X_g}=[x_g,y_g,z_g]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{X_B}=[x_B,y_B,z_B]^{\mathrm{T}}$ 分别是同一矢量 X 在 $OX_gY_gZ_g$ 和 $OX_BY_BZ_B$ 坐标系中的 3 个正交分量;$\boldsymbol{C_g^B}$ 是由 $OX_gY_gZ_g$ 旋转到 $OX_BY_BZ_B$ 的方向余弦矩阵;$\boldsymbol{C_B^g}$ 是由 $OX_BY_BZ_B$ 旋转到 $OX_gY_gZ_g$ 的方向余弦矩阵,它们是互逆的正交矩阵,因此,$\boldsymbol{C_B^g}=(\boldsymbol{C_g^B})^{-1}=(\boldsymbol{C_g^B})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{C_g^B}*\boldsymbol{C_B^g}=\boldsymbol{I}$。

方向余弦矩阵的具体表达式如下:

$$\boldsymbol{C_B^g}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi\\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi\\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}\tag{1}$$

$$\boldsymbol{C_g^B}=\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\theta & \sin\psi\cos\theta & -\sin\theta\\ \cos\psi\sin\theta\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi\\ \cos\psi\sin\theta\sin\varphi+\sin\psi\sin\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}\tag{2}$$

应用到矢量物理量的测量变换中,姿态测量传感器固定在载体坐标系中,该坐标系从固定坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 以 Z-Y-X 顺序经欧拉角(ψ,θ,φ)旋转到 $OX_BY_BZ_B$,在载体坐标系 $OX_BY_BZ_B$ 中的测量结果为 $\boldsymbol{X_B}$。如果姿态测量传感器测量得到的角度值是前述欧拉角(ψ,θ,φ),使用上面的公式,对在载体坐标系中的传感器测量值 $\boldsymbol{X_B}$ 进行修正,可以求出所测量的矢量值在固定坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 中的 3 个分量,即求出 X_g。

1.4 无限小角度转动

在上述 Z-Y-X 顺序欧拉旋转中,如果转动欧拉角(ψ,θ,φ)为无限小角度值,则在以欧拉角形式表示的方向余弦矩阵中有以下近似:

$\sin\psi\approx\psi$,$\sin\theta\approx\theta$,$\sin\phi\approx\phi$,$\cos\phi\approx1$,$\cos\theta\approx1$,$\cos\varphi\approx1$

忽略二阶及以上乘积项如 $\sin\theta\sin\phi$、$\sin\psi\sin\phi$、$\sin\psi\sin\theta\sin\phi$ 等小角度乘积项,则方向余弦矩阵可以近似简化为

$$C_B^g=\begin{bmatrix}1 & -\psi & \theta\\ \psi & 1 & -\varphi\\ -\theta & \varphi & 1\end{bmatrix}\text{或者},$$

$$C_g^B=\begin{bmatrix}1 & \psi & -\theta\\ -\psi & 1 & \varphi\\ \theta & -\varphi & 1\end{bmatrix}$$

可以看出,当转动欧拉角为无限小角度值时,以欧拉角形式表示的方向余弦矩阵均为对称矩阵,矩阵乘法的顺序不影响乘法结果。也就是说,当转动欧拉角为无限小角度值时,将转动分解为 3 次连续欧拉旋转,结果与旋转顺序无关。在惯性导航等设备的应用中,设备测量载体的姿态角度时,量化

速率比较高,相当于每次叠加计算所对应的转动角度均为无限小角度,可以采用上述对称矩阵形式的方向余弦矩阵进行近似求解,大大简化求解过程,提高计算速度[5]。

2　姿态角及其坐标变换

2.1　姿态角

姿态角也是一组能够完整表述刚体相对于参照坐标系转动位置的参量,包括偏航角、俯仰角和滚转角,其中的俯仰角和滚转角通常为倾斜角。姿态角的参照固定坐标系通常为 L 坐标系中的北东地(NED)坐标系[6]。

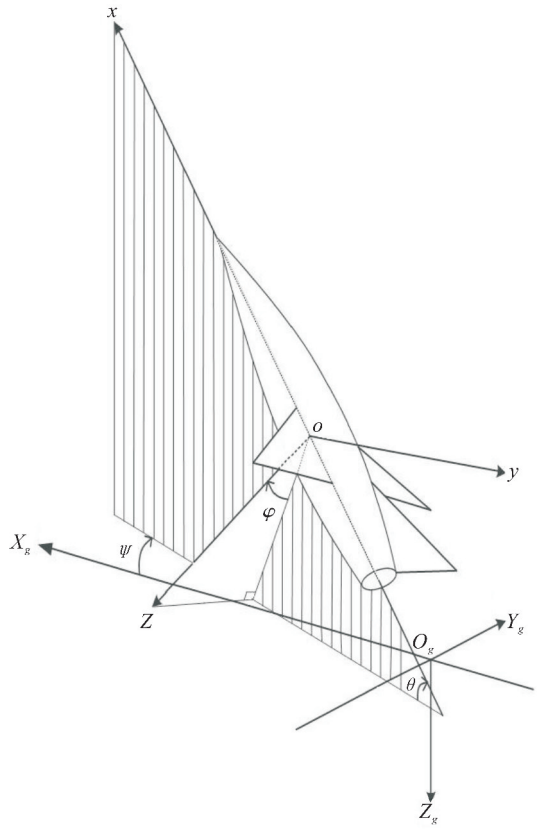


图 2　载体姿态角定义示意图

Fig. 2　Schematic diagram of definition of carrier´s attitude

按欧拉角定义方法来定义固定坐标系和载体坐标系,在载体坐标系 $OXYZ$ 中,OX 轴相对于固定坐标系 $O_gX_gY_gZ_g$ 的水平面以及 O_gX_g(正北方向)、OY 轴相对于 $O_gX_gY_gZ_g$ 的水平面,存在 3 个偏角,它们反映了载体的姿态,称为载体的姿态角,通常用(ψ,θ,φ)表示,参见图 2,具体定义如下。

偏航角 ψ:载体坐标系 X 轴在水平面上投影与固定坐标系 X_g 轴之间的夹角,由载体 X 轴的投影线逆时针转至 X_g 轴时,偏航角为正,即机头右偏航为正,反之为负。偏航角通常也称为方位角或航向角。

俯仰角 θ:载体坐标系 X 轴与水平面的夹角。当 X 轴的正半轴位于过坐标原点的水平面之上(抬头)时,俯仰角为正,否则为负。

滚转角 φ:有 2 种定义,第一种定义为载体坐标系 Z 轴与包含载体 X 轴的铅垂面间的夹角,用 φ_z 表示,第二种定义为载体坐标系 Y 轴与水平面的夹角,用 φ_y 表示;载体向右滚为正,反之为负。滚转角的两种定义在实际工程计算中都有人使用。

旋转欧拉角主要是一种数学上的概念,姿态角的定义更具物理意义,容易通过测角传感器测量得到。但是,由于各种测角传感器的原理各异,具体使用时,需要明确传感器输出角度值的物理意义,以及滚转角的具体定义,准确使用姿态修正变换公式。

2.2　姿态角坐标变换中的问题

前面的欧拉旋转变换公式是基于 3 个欧拉角及其旋转顺序推导的,不同的旋转顺序对应不同的变换系数矩阵,它表明即使是相同的旋转角度,不同的旋转顺序对应的最终旋转结果也是不同的。

从欧拉角和姿态角的定义看,欧拉角和姿态角是不同的角度,因此,在矢量物理量测量及其坐标变换修正中,应仔细考虑角度测量传感器所测量角度的实际物理意义;否则直接将姿态角测量值当作旋转欧拉角,应用前述欧拉角旋转变换公式(1)和(2)进行坐标变换修正计算,可能存在原理性误差。

在实际工程应用中,角度测量传感器一般都是基于载体坐标系的,通过与载体固定连接,实时测量载体的姿态角度。各种不同的姿态角度测量传感器,往往原理不同,性能特点各异,适用的环境条件各不一样。常用的测角传感器有加速度计、磁力计、陀螺仪以及以陀螺仪为核心的惯导系统(包括平台式惯导系统和捷联惯导系统)等。

2.3　由加速度计求解倾斜角

加速度计也称重力感应器或力感应器,主要是

通过测量组件在某个轴向的受力情况来计算轴向加速度的大小和方向。由于重力加速度只是地表垂直方向加速度,因此,借助三轴加速度计可以测得一个固定平台相对地球表面的运动方向[7]。

通常加速度计的测量值包含了重力加速度和其它受力运动产生的加速度,而在静态、匀速运动或接近匀速运动的低速(即维持惯性)条件下,可以认为或近似认为只有重力而无其它作用力,测量的三轴加速度值认为是重力加速度产生的,由三轴加速度测量值可以求解载体的倾斜角度(姿态角中的 2 个量)。

实际上,以下 2 种求解过程是互为逆运算关系:1)已知固定坐标系下重力加速度的 3 个分量,通过加速度计测量载体坐标系下的重力加速度,求解载体的倾斜角度;2)已知或者测量获得载体坐标系的倾斜角度,通过测量载体坐标系下的重力加速度的 3 个分量,求解固定坐标系下的重力加速度值。

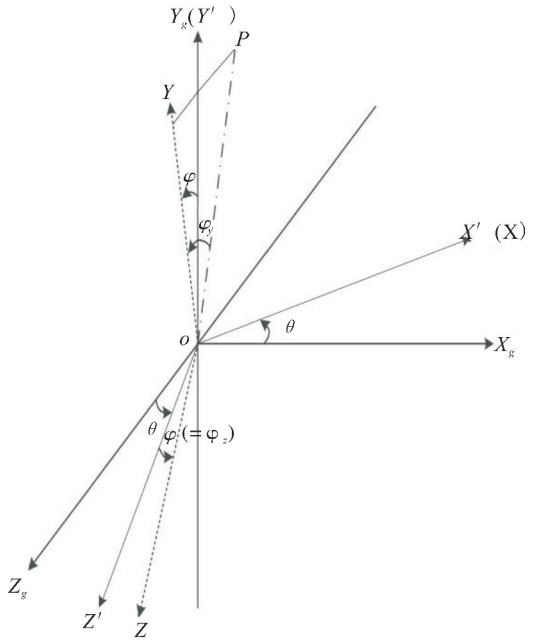


图 3 加速度计测量计算姿态角的原理示意图

Fig. 3 Principle diagram of measuring attitude angles by accelerometer

下面来推导由加速度计求解倾斜角度的具体求解过程。

如图 3 所示,$OX_gY_gZ_g$ 为固定坐标系,$OXYZ$ 为载体坐标系,三分量加速度计固联在载体坐标系的坐标轴上。图中将水平面 OX_gY_g 旋转到了铅锤面上。

在 $OX_gY_gZ_g$ 坐标系中,重力加速度的值为 $\boldsymbol{G}=[G_x,G_y,G_z]^{\mathrm{T}}=[0,0,g]^{\mathrm{T}}$,$g$ 为重力加速度常数;在 $OXYZ$ 坐标系中,加速度计的测量值为 $g=[g_x,g_y,g_z]^{\mathrm{T}}$。

我们假定由坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 到坐标系 $OXYZ$ 是经过 Y-Z 顺序 2 个欧拉旋转实现的,旋转的具体步骤:

1)在 $OX_gY_gZ_g$ 坐标系内,绕 OY_g 轴(顺螺旋方向,即逆时针方向)旋转 θ 角,即 OX_g 轴和 OZ_g 轴均在 OX_gZ_g 平面内旋转了 θ 角度,得到坐标系 $OX'Y'Z'$,其中 Y' 与 Y_g 重合;

2)在 $OX'Y'Z'$ 坐标系内,绕 OX' 轴(顺螺旋方向,即逆时针方向)旋转 φ 角,即 OY' 轴和 OZ' 轴均在 $OY'Z'$ 平面内旋转了 φ 角度,得到坐标系 $OXYZ$,其中 X 与 X' 重合。

至此,可以得到以下一些关系:

1)OX 轴在 OX_gZ_g 平面内,因此 θ 等于 OX 轴与水平面 OX_gY_g 的夹角,即目标的俯仰角;

2)OY' 与 OY_g 重合,$OY_g\perp OX_gZ_g$ 平面,因此平面 $OY'Z'\perp OX_gZ_g$ 平面(即铅锤面),OZ' 为相交线;OY'、OY、OZ'、OZ 在同一平面 $OY'Z'$ 内,OY 和 OZ 在 OX_gZ_g 平面上的投影均为 OZ';因此,OZ 轴与铅锤面 OX_gZ_g 的夹角等于 φ,也就是滚转角的第一种定义值 $\varphi_z=\varphi$;

3)假设 OY 轴在水平面 OX_gY_g 上的投影为 OP,OY 与水平面 OX_gY_g 的夹角即为滚转角的第二种定义值 φ_y。用 φ_y 和 φ 两个角度分别计算 OY 轴上的单位矢量在 OZ_g 上的投影分量,则有:$\sin\varphi_y=\sin\varphi\cos\theta$。

根据以上关系,重力加速度在 $OX_gY_gZ_g$ 坐标系中的值 $G=[G_x,G_y,G_z]^{\mathrm{T}}=[0,0,g]^{\mathrm{T}}$ 与加速度计的测量值 $g=[g_x,g_y,g_z]^{\mathrm{T}}$ 之间,满足欧拉角旋转变换关系,即:

$$\begin{bmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

由 $G_x=0$ 和 $G_y=0$ 可以得到:

$$\begin{cases} g_x\cos\theta+g_y\sin\theta\sin\varphi+g_z\sin\theta\cos\varphi=0 \\ g_y\cos\varphi-g_z\sin\varphi=0 \end{cases}$$

由上式推导出:

$$\varphi=\arctan\left(\frac{g_y}{g_z}\right) \tag{4}$$

$$\theta=\arctan\left(\frac{-g_x}{g_y\sin\varphi+g_z\cos\varphi}\right) \tag{5}$$

所以,由加速度计求解倾斜角的计算方法:

1)在载体坐标系中测量 3 个正交加速度计的值 g_x,g_y,g_z;

2)用上述 2 个式(4)和式(5)求解出 θ 和 φ;

3)俯仰角为 θ;

4)滚转角 φ 的第一种定义值为 $\varphi_z=\varphi$,第二种定义值 φ_y 由关系式 $\sin\varphi_y=\sin\varphi\cos\theta$ 求解;

由加速度计求解倾斜角适用于静止、匀速或近似匀速运动的条件。在不考虑偏航角的情况下,可以通过测量倾斜角对矢量测量值进行倾斜修正。

假设在载体坐标系下测量得到的矢量值为 $\boldsymbol{X}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$,载体坐标系的倾斜角$(\theta,\varphi)$由传感器测量得到,则将 $\boldsymbol{X}$ 转换到固定坐标系下的值为 $\boldsymbol{X}_g=[x_g,y_g,z_g]^{\mathrm{T}}$,按照公式(3),得到:

$$\begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中:θ 为俯仰角测量值;滚转角 φ 的传感器测量值如果为第一种定义 φ_z,则 $\varphi=\varphi_z$,为第二种定义 φ_y 时,则由 $\sin\varphi=\sin\varphi_y/\cos\theta$ 计算得出 φ。

2.4　由磁力计求解偏航角

磁力计也称为磁感器,可用于测试磁场强度和方向,原理类似指南针。

在地球表面,地磁场始终是沿着磁感应线(地磁场的磁力线)指向北的,某点的磁场强度方向为磁感应线在该点的切线方向,它在北向和垂直方向有相应的分量,在东西方向的分量为 0。因此,在固定坐标系下,地磁场矢量可以表示为 $M_g=[M_{xg},M_{yg},M_{zg}]^{\mathrm{T}}=[M_{xg},0,M_{zg}]^{\mathrm{T}}$,即 $M_{yg}=0$。如图 4 所示,地磁场强度总量为 M_g,其北向分量为 $M_{xg}=M_g\cos\delta$,垂直分量为 $M_{zg}=M_g\sin\delta$,东向分量为 $M_{yg}=0$。

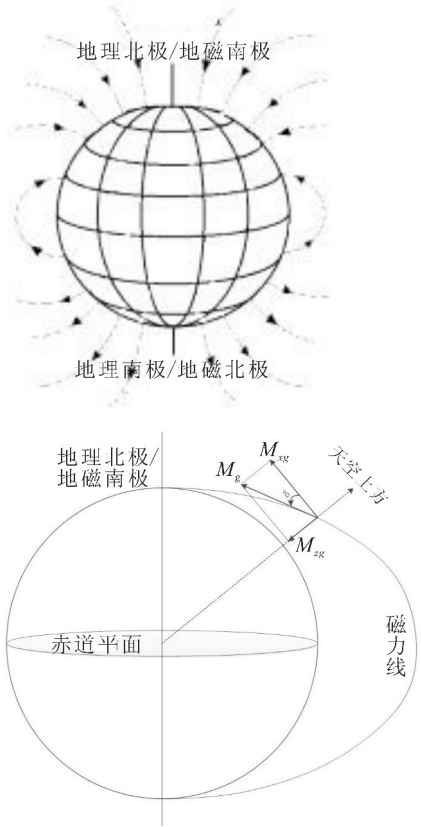


图 4　地磁场及其三分量指向示意图

Fig. 4　Schematic diagram of geomagnetic field and its tricomponent

由此可以看出,在载体目标上安装三轴磁力计,测量出三轴地磁场强度 $M=[M_x,M_y,M_z]^{\mathrm{T}}$,就可以计算出载体坐标系的方位角(即偏航角)$\psi_M$。当然,实际上地球的地理北极和地磁南极并不重合,有一定的夹角,称为磁偏角 $\Delta\psi$。根据经纬度可以查询到该磁偏角 $\Delta\psi$ 的大小。固定坐标系的北向指向地理北极,磁力计求得的北向指向地磁南极,因此,用磁力计求解的方位角 ψ_M 需要进行磁偏角 $\Delta\psi$ 修正,才能得到地理方位,即真正的偏航角 ψ[8]。

和加速度计的测量一样,通常情况下,安装磁力计的载体坐标系也是处于运动状态,具有一定的倾斜角,因此,利用磁力计测量值求解方位时,也需要进行倾斜修正。

下面来推导由磁力计求解偏航角的具体求解过程。

假设在载体坐标系下测量得到的地磁场为 $M=[M_x,M_y,M_z]^{\mathrm{T}}$,载体坐标系的倾斜角$(\theta,\varphi)$通过加速度计求解得到,按照公式(6),可以将地磁场测量值 $M=[M_x,M_y,M_z]^{\mathrm{T}}$ 进行倾斜修正,得到相对于固定坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 仅有偏航角 ψ_M 而无倾斜角的坐标系下的值 $M_p=[M_{xp},M_{yp},M_{zp}]^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{bmatrix} M_{xp} \\ M_{yp} \\ M_{zp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{7}$$

而 $M_p=[M_{xp},M_{yp},M_{zp}]^{\mathrm{T}}$ 是由地磁场在固定坐标系下的值 $M_g=[M_x,0,M_{zg}]^{\mathrm{T}}$ 经过旋转偏航角 ψ_M 得到的,而且,这个偏航角的旋转在倾斜之前或之后,结果都是一样的。因此有:

$$M_g = \begin{bmatrix} M_{xg} \\ M_{yg} \\ M_{zg} \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} \cos\psi_M & -\sin\psi_M & 0 \\ \sin\psi_M & \cos\psi_M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_p =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\psi_M & -\sin\psi_M & 0 \\ \sin\psi_M & \cos\psi_M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \tag{8}$$

由于 $M_{xg}=0$,展开上式可以得到:

$$\psi_M = \arctan -\frac{M_{yp}}{M_{xp}} =$$

$$\arctan\left(\frac{M_y\cos\varphi - M_z\sin\varphi}{M_x\cos\theta + M_y\sin\theta\sin\varphi + M_z\sin\theta\cos\varphi}\right) \tag{9}$$

式中:θ 为俯仰角测量值,$\varphi=\varphi_z$(当滚转角测量值为第一种定义值 φ_z 时)或者由计算式 $\sin\varphi=\sin\psi_y/\cos\theta$ 计算得到(当滚转角测量值为第二种定义值 φ_y 时)。

再考虑磁偏角 $\Delta\psi$ 的修正,相对于固定坐标系的偏航角为:$\psi=\psi_M+\Delta_\psi$。

所以,通过测量或测量计算得到载体坐标系的倾斜角(θ,φ),以及载体坐标系下地磁场的值 $M=[M_x,M_y,M_z]^{\mathrm{T}}$,可以求解偏航角 ψ_M,再进行磁偏角 Δ_ψ 修正,就可以求得相对于固定坐标系的偏航角 ψ。最终得到载体的姿态角(ψ,θ,φ)。

2.5 姿态角的坐标变换计算

综合前面的分析,在载体坐标系下测量某一矢量物理量时,同步测量载体的姿态角,通过姿态角的坐标变换,将载体坐标系下的矢量测量结果变换到固定坐标系。而姿态角与旋转欧拉角在定义上是有区别的。因此,在姿态角的测量以及角度计算中,要明确角度输出值的定义,特别是滚转角的输出值所对应的定义,引用合适的变换矩阵,而不能简单直接地引用欧拉角旋转变换公式。

一组姿态角对应一种旋转结果,但一种旋转结果可以对应多组旋转欧拉角。下面以 *Z-Y-X* 旋转顺序为例,在前述倾斜角修正和偏航角修正算法的基础上,推导姿态角与 *Z-Y-X* 顺序欧拉角之间的关系。

图 5 为姿态角与 *Z-Y-X* 顺序欧拉旋转角的关系示意图。图中的旋转步骤如下:

1)固定坐标系为 $OX_gY_gZ_g$,一般是 *L* 坐标系(其中的 *NED* 坐标系)。在坐标系为 $OX_gY_gZ_g$ 内,绕 OZ_g 轴(顺螺旋方向,即逆时针方向)旋转 ψ 角,即 OX_g 轴和 OY_g 轴均在 OX_gY_g 平面(通常为水平面)内旋转了 ψ 角度,得到坐标系 $OX_1Y_1Z_1$,其中 OZ_1 轴与 OZ_g 轴重合,OX_1 轴和 OY_1 轴均在 OX_gY_g 平面内;

2)在 $OX_1Y_1Z_1$ 坐标系内,绕 OY_1 轴(顺螺旋方向,即逆时针方向)旋转 θ 角,即 OX_1 轴和 OZ_1 轴均在铅锤面 OX_1Z_g 内旋转了 θ 角度,得到坐标系 $OX_2Y_2Z_2$,其中 OY_2 轴与 OY_1 轴重合,OX_2 轴和 OZ_2 轴均在铅锤面 OX_1Z_g 内,OX_2 轴在水平面 OX_gY_g 上的投影为 OX_1 轴;

3)在 $OX_2Y_2Z_2$ 坐标系内,绕 OX_2 轴(顺螺旋方向,即逆时针方向)旋转 φ 角,得到坐标系 $OX_3Y_3Z_3$,其中 OX_3 轴在与 OX_2 轴重合,OZ_3 轴在铅锤面 OX_1Z_g 上的投影为 OZ_2 轴,OZ_3 轴与铅锤

面 OX_1Z_g 的夹角即是滚转角的第一种定义,记为 φ_z,显然有 $\varphi_z=\varphi$;而 OY_3 轴与水平面 OX_gY_g 的夹角记为 φ_y。

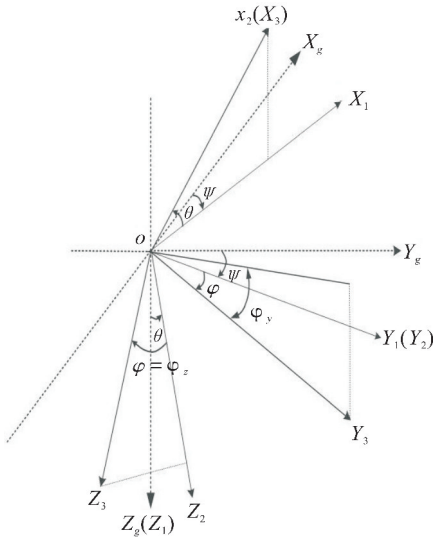


图 5　姿态角与 *Z-Y-X* 顺序欧拉旋转角的关系示意图

Fig. 5　Schematic diagram of relation between attitude angles and *Z-Y-X* order

从坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 到 $OX_3Y_3Z_3$,根据姿态角的定义得到:ψ 为偏航角,θ 为俯仰角,φ 为横滚角第一种定义值,即 $\varphi_z=\varphi$,下面来推导滚转角第二种定义值 φ_y 的表达式。

假设 OY_3 轴上有一个单位矢量 u_{y3},在坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 上进行正交分解,它在 OZ_g 轴上的分量为 $\sin\psi_y$;

如果在坐标系 $OX_2Y_2Z_2$ 上对 u_{y3} 进行正交分解,它在 OZ_2 轴上的分量为 $\sin\psi_y$,在 OY_2 轴上的分量为 $\cos\varphi$,在 OX_2 轴上的分量为 0;OY_2 轴上的分量为 $\cos\varphi$ 在坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 上进行正交分解,由于 OY_2 在水平面 OX_gY_g 上,因此 $\cos\varphi$ 在 OZ_g 轴上分量为 0;OZ_2 轴上的分量为 $\sin\varphi$ 在坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 上进行正交分解,它在 OZ_g 轴上分量为 $\sin\psi\cos\theta$。

OY_3 轴上的单位矢量 u_{y3},用两种不同的正交分解方法求解在 OZ_g 轴上的分量,结果应该相等,因此有:$\sin\psi_y=\sin\psi\cos\theta$。

由此得出姿态角与 *Z-Y-X* 顺序欧拉角的关系为:欧拉角 ψ 等于偏航角;欧拉角 θ 等于俯仰角;欧拉角 φ 与 2 种定义横滚角的关系:$\varphi_z=\varphi$,$\sin\psi_y=\sin\psi\cos\theta$。

因此,矢量物理量的姿态变换计算方法:假设载体坐标系下的矢量测量值为 $\boldsymbol{X}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}$,载体坐标系的姿态角测量值为($\psi,\theta,\varphi$),则矢量 $\boldsymbol{X}$ 在固定坐标系下的修正结果 $\boldsymbol{X}_g=[x_g,y_g,z_g]^{\mathrm{T}}$ 为

$$\begin{bmatrix}x_g\\y_g\\z_g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\cos\psi\cos\theta & \cos\psi\sin\theta-\sin\psi\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi\\ \sin\psi\cos\theta & \sin\psi\sin\theta\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi\\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\tag{10}$$

式中:ψ 为偏航角测量值,如果偏航角是通过磁力计测量的,需要进行磁偏角 $\Delta\psi$ 修正;θ 为俯仰角测量值;当滚转角的测量值为第一种定义值 φ_z 时,$\varphi=\varphi_z$;当滚转角测量值为第二种定义值 φ_y 时,由计算式 $\sin\varphi=\sin\varphi_y/\cos\theta$ 计算得到 φ。

姿态角的取值范围为:$\psi,\varphi\in[-\pi,\pi]$,$\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$。

2.6　陀螺仪和惯导系统测量姿态角的比较

陀螺仪也称作地感器,由陀螺构成的惯导系统,无论是传统的机械转子陀螺平台式惯导系统,还是新型光纤陀螺捷联惯导系统,都可以求解运动目标的瞬时速度、位置以及姿态角度[4,8]。

在传统的机械转子陀螺和平台式惯导系统中,经过初始对准后,输出的倾斜角是载体坐标系 x、y 轴相对于基准水平面的角度,而偏航角则是相对于正北方向的。俯仰角和偏航角与姿态角中的定义完全一致,滚转角则与姿态角中的第二种定义一致,使用变换计算式(10)时,由计算得到 φ。

而在捷联惯导系统中,使用虚拟的数学平台代替了物理平台,陀螺测量的是载体相对于惯性坐标系的转动角速度,然后通过计算得到载体的姿态角,具体计算过程为

1)陀螺仪测量 $\boldsymbol{w}_{IB}^{B}$,运用地球参数和位置参数计算 $\boldsymbol{w}_{IL}^{B}$;

2)通过姿态四元数微分方程 $q_B^L=\frac{1}{2}q_B^L w_{IB}^B-\frac{1}{2}w_{IL}^L q_B^L$ 求解姿态四元数 q_B^L;

3)用姿态四元数 q_B^L 的元素表示姿态矩阵 $\boldsymbol{C_B^L}$;

4)根据余弦矩阵和欧拉角定义,用欧拉角表示的姿态矩阵形式求解欧拉角(ψ,θ,φ)。

由上述导航解算原理可知,捷联惯导系统实际给出的是 *Z-Y-X* 顺序欧拉角,其中偏航角输出已经修正为正北航向,俯仰角和滚转角经过象限修正为欧拉角真值,滚转角等同于姿态角中的第一种定义 φ_z。坐标修正变换可以直接使用变换计算式(10),其中 $\varphi=\varphi_z$。

3 结束语

在实施任意姿态(也就是载体坐标系)下矢量物理量的测量时,一般需要同步测量载体的姿态角,然后通过坐标变换公式对矢量测量值进行修正,求解出固定坐标系下的矢量值。

以测量水面舰船目标的磁场为例,测量时,目标在水面上,测量传感器沉底布放,传感器的姿态(包括方位)与确定的固定坐标系不平行,即存在一个传感器坐标系,其姿态角可以测量,因此,对传感器的测量结果,应该进行姿态角变换修正。

很多文献和工程实践中,无论是基于陀螺测量的姿态角还是其它传感器测量的倾斜角,往往直接引用旋转欧拉角坐标变换公式,进行测量数据修正和坐标变换计算。从前面的分析可以看出,各种不同的传感器测量的姿态角,其输出值所代表的物理意义不一定完全相同,特别是滚转角存在两种不同的定义,如果传感器的滚转角输出值物理意义不同于欧拉角定义,直接引用旋转欧拉角坐标变换公式,就会产生原理性误差。

正确的做法是:分析姿态角传感器的工作原理,明确姿态角测量值的定义,确定姿态角测量值与某种欧拉角(通常采用 *Z-Y-X* 顺序欧拉角)的数值关系,再引用欧拉角修正变换计算式。

如果滚转角输出值对应第一种定义,即载体坐标系 *Z* 轴与包含载体 *X* 轴的铅垂面间的夹角,则与旋转欧拉角定义一致,可以直接引用旋转欧拉角坐标变换公式;如果滚转角输出值对应第二种定义,即载体坐标系 *Y* 轴与水平面的夹角,则与旋转欧拉角定义不一致,不能直接引用旋转欧拉角坐标变换公式。

另外,在工程应用中,通常在静态或接近静态条件下,使用低成本的倾斜仪测量倾斜角,使用磁方位仪测量方位角,滚转角测量值为第二种定义值,在坐标变换修正计算中应用前述公式(10)时,由计算 φ。在运动状态下,一般使用陀螺仪或基于陀螺仪的惯导系统测量姿态角。如果是传统的机械转子陀螺或者平台式惯导系统,姿态角测量值与倾斜仪+磁方位仪相同,滚转角测量值为第二种定义值,坐标变换修正计算中应用前述公式(10)时,由计算 φ;现在更广泛使用的是光纤陀螺捷联惯导系统,姿态角测量值一般为 *Z-Y-X* 顺序欧拉角,滚转角测量值为第一种定义值 φ_z,在坐标变换修正计算中应用前述公式(10)时,$\varphi=\varphi_z$。

参考文献

[1] 赵文春,朱兴乐. 小波变换在船载矢量地磁场测量中的应用[J]. 水中兵器,2014(1):58-62.

[2] 牛嗣亮,张振宇,胡永明,等. 单矢量水听器的姿态修正测向问题探讨[J]. 国防科技大学学报,2011,33(6):105-110.

[3] 李康,黄胜,赵辉. GPS 坐标系的转换及其在姿态求解中的应用[J]. 指挥控制与仿真,2008,30(5):113-115.

[4] 吴铁军,马龙华,李宗涛. 应用捷联惯导系统分析[M]. 北京:国防工业出版社,2011.

[5] 干国强,邱致和. 导航与定位—现代战争的北斗星[M]. 北京:国防工业出版社,2000.

[6] 周瑞青,刘新华,史守峡,等. 捷联导引头稳定与跟踪技术[M]. 北京:国防工业出版社,2010.

[7] 张耀文,江佳峻,王兆兵,等. 加速度计测倾角的原理分析及系统设计实现[J]. 高新技术,2011(18):2-3.

[8] 全伟,刘百奇,宫晓琳,等. 惯性/天文/卫星组合导航技术[M]. 北京:国防工业出版社,2011.